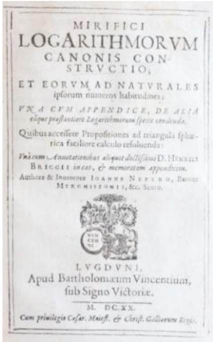
Introduction du logarithme décimal



"Je résous la question par le bienfait des logarithmes.
Je ne pense pas que quelque chose soit supérieur à la théorie de Neper…"
Kepler, 1624

C'est John Neper (1550-1617), baron écossais, qui définit le premier les logarithmes, dans deux ouvrages parus en 1614 et 1620, avec l'objectif de simplifier les calculs des marins et des astronomes :
Au cours de l'été 1615, l'anglais Henry Briggs rencontre Neper et discute avec lui de l'invention d'un système de logarithmes plus faciles à calculer, que ceux créés par Neper. De là naissent les logarithmes *décimaux*. Briggs mettra près de 10 ans, avec de nombreux calculateurs auxiliaires, à établir une table des logarithmes de 30 000 entiers naturels, avec une précision de 14 chiffres ! Elle sera publiée en 1624 dans le livre *Arithmetica logarithmica.*

Les fonctions logarithmes (du grec *logos* : logique, raison et *arithmos* : nombre) forment une grande famille, dont deux de ses membres sont particulièrement utilisés :

- le logarithme **népérien** (noté **ln** sur votre calculatrice)
- le logarithme **décimal** (noté **log** sur votre calculatrice)

Les logarithmes décimaux

L'idée de départ est de **remplacer les multiplications par des additions** et les quotients par des soustractions. Pour cela, on associe deux suites de nombres selon le schéma suivant :

$1 = 10^0 \quad \rightarrow \quad 0$ a) Quelle est la nature de la suite située à gauche des flèches ?
$10 = 10^1 \quad \rightarrow \quad 1$
$100 = 10^2 \quad \rightarrow \quad 2$ b) Quelle est la nature de la suite située à droite des flèches ?
$1\,000 = 10^3 \quad \rightarrow \quad 3$

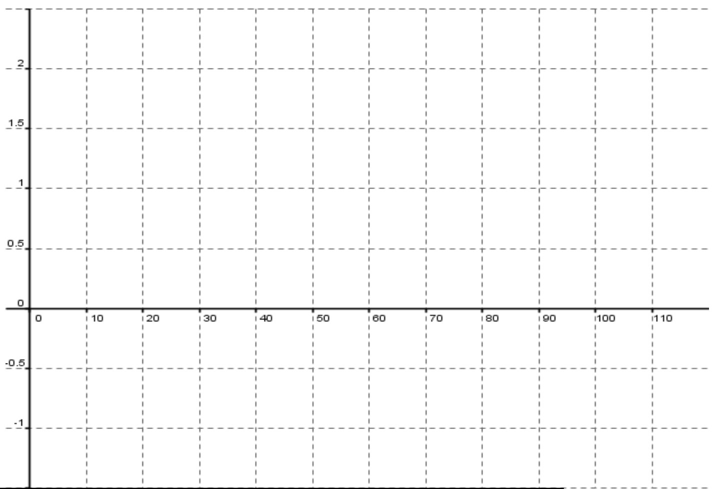
On étend le procédé aux exposants négatifs, compléter :
$0{,}1 = \ldots\ldots \quad \rightarrow \ldots..$; $0{,}01 = \ldots\ldots \quad \rightarrow \ldots\ldots$; $0{,}001 = \ldots\ldots \quad \rightarrow \ldots\ldots$

On définit ainsi une fonction appelée logarithme décimal

x	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000
$y = \log(x)$				0	1	2	3

Lorsque x est une puissance entière de 10, on a donc: $\log(10^x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ | $y = \log(x) <=> x = \ldots\ldots\ldots$

La fonction *logarithme décimal* est donc la fonction réciproque de la fonction qui à x associe 10^x.
Placer (lorsque l'échelle choisie le permet) les points correspondants aux valeurs précédentes dans le repère ci-contre.



Une propriété fondamentale

On sait que $10^2 \times 10^3 = 10^{\cdots\cdots}$
donc $\log(10^2 \times 10^3) = \log(10^{\cdots\cdots}) = \ldots\ldots\ldots$ et
$\log(10^2) + \log(10^3) = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Pour tous réels a et b strictement positifs :
$$\mathbf{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)}$$

En déduite la propriété suivante : pour tout réel *a* strictement positif $\log(a^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
Généralisation pour tout n entier : $\log(a^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Calculer de deux manières différentes $\log\left(a \times \frac{1}{a}\right)$ et en déduire :

pour tous réels a et b strictement positifs $\log\left(\frac{1}{a}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour aller plus loin…

Pour l'instant, cette fonction n'est définie que lorsque x est une puissance entière de 10.

Cherchons d'**autres valeurs**.

Soient *a* et *b* deux nombres positifs, cherchons le nombre *g* situé entre *a* et *b* de telle façon que les nombres *a* , *g* , *b* soient en **progression géométrique** :

- Démontrer que $a \times b = g^2$ et en déduire g en fonction de a et b

Le nombre $\boldsymbol{g} =$ **…………..** s'appelle la **moyenne géométrique de *a* et *b***

Soient *a* et *b*, deux nombres, cherchons le nombre *m* situé entre *a* et *b* de telle façon que les nombres *a* , *m* , *b* soient en **progression arithmétique**:

- Démontrer que $a + b = 2m$ et en déduire m en fonction de a et b

Le nombre $\boldsymbol{m} =$ **…………** s'appelle la **moyenne arithmétique de *a* et *b***

On aura donc :

Moyenne géométrique de	Moyenne arithmétique de
0,1 et 10 :	-1 et 1 :
10 et 1000 :	1 et 3 :
10 et 100 :	1 et 2 :
1 et 10 :	0 et 1 :

- On obtient ainsi deux nouvelles valeurs (deux dernières lignes du tableau) :

$$\log(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ ) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \log(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ ) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Placer les deux nouveaux points correspondant dans le repère précédent.
- Relier « régulièrement » tous les points et vérifier que la courbe obtenue est bien celle de la fonction log obtenue avec la calculatrice.

La gamme tempérée, une suite géométrique…

La gamme tempérée est la gamme connue couramment dans le monde occidental : Do Ré Mi Fa Sol La Si Do….

Rappel : à chaque note correspond une fréquence de la vibration. Avec les dièses et les bémols on a donc 13 fréquences et 12 intervalles (appelés des demi-tons) : voir tableau ci-dessous. Par exemple entre Do et Do# il y a un demi-ton.

Vous devez trouver les fréquences manquantes dans le tableau en utilisant les deux informations suivantes :

- Les fréquences sont en progression géométrique
- La fréquence du Do4 est le double de celle du Do3 (on dit qu'on a parcouru une octave, soit 8 notes).

Note	Do3	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do4
Fréquence	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}
Valeur (en Hz)	261,6	277,2		311,1			370,0		415,3	440,0	466,2		