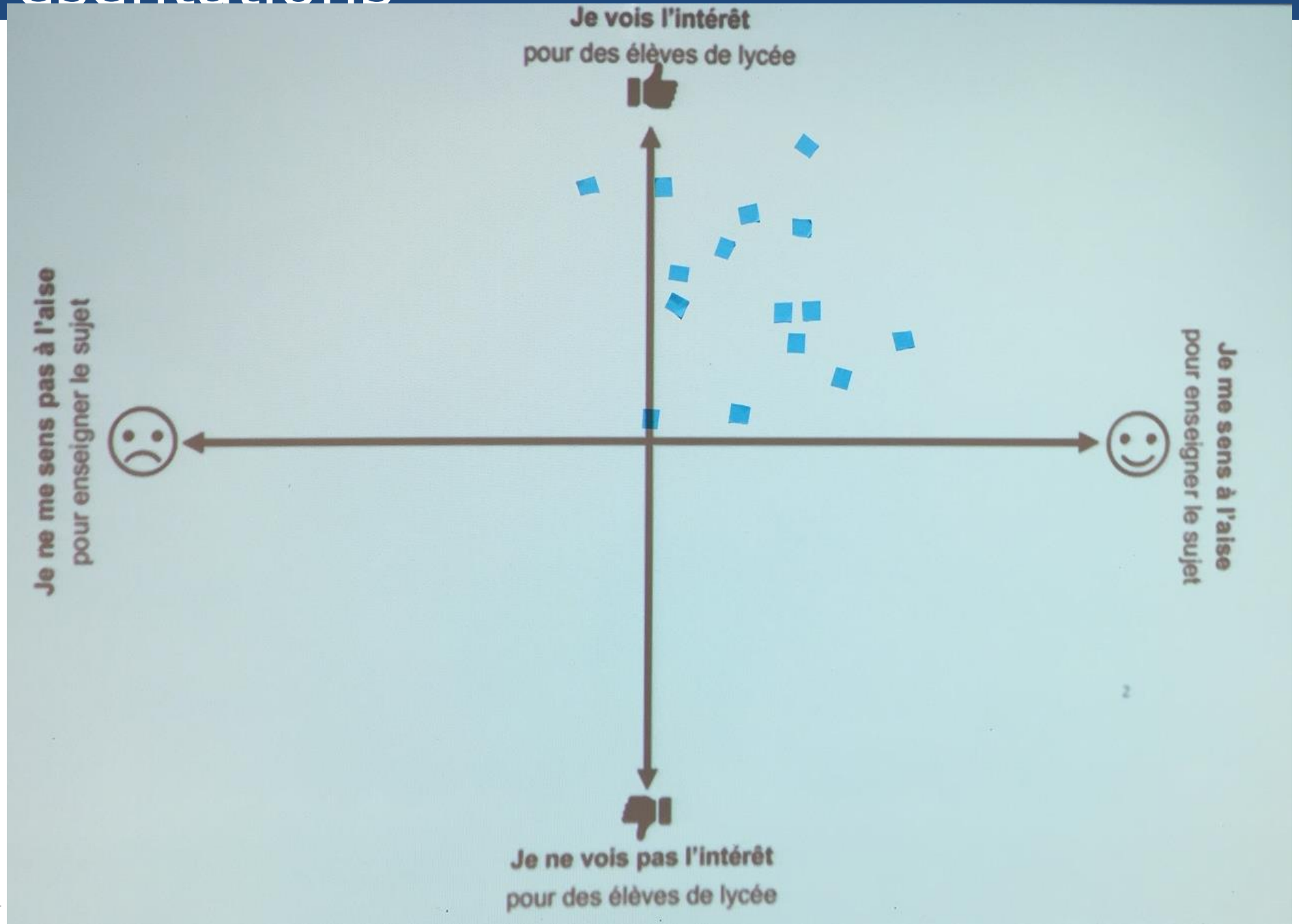
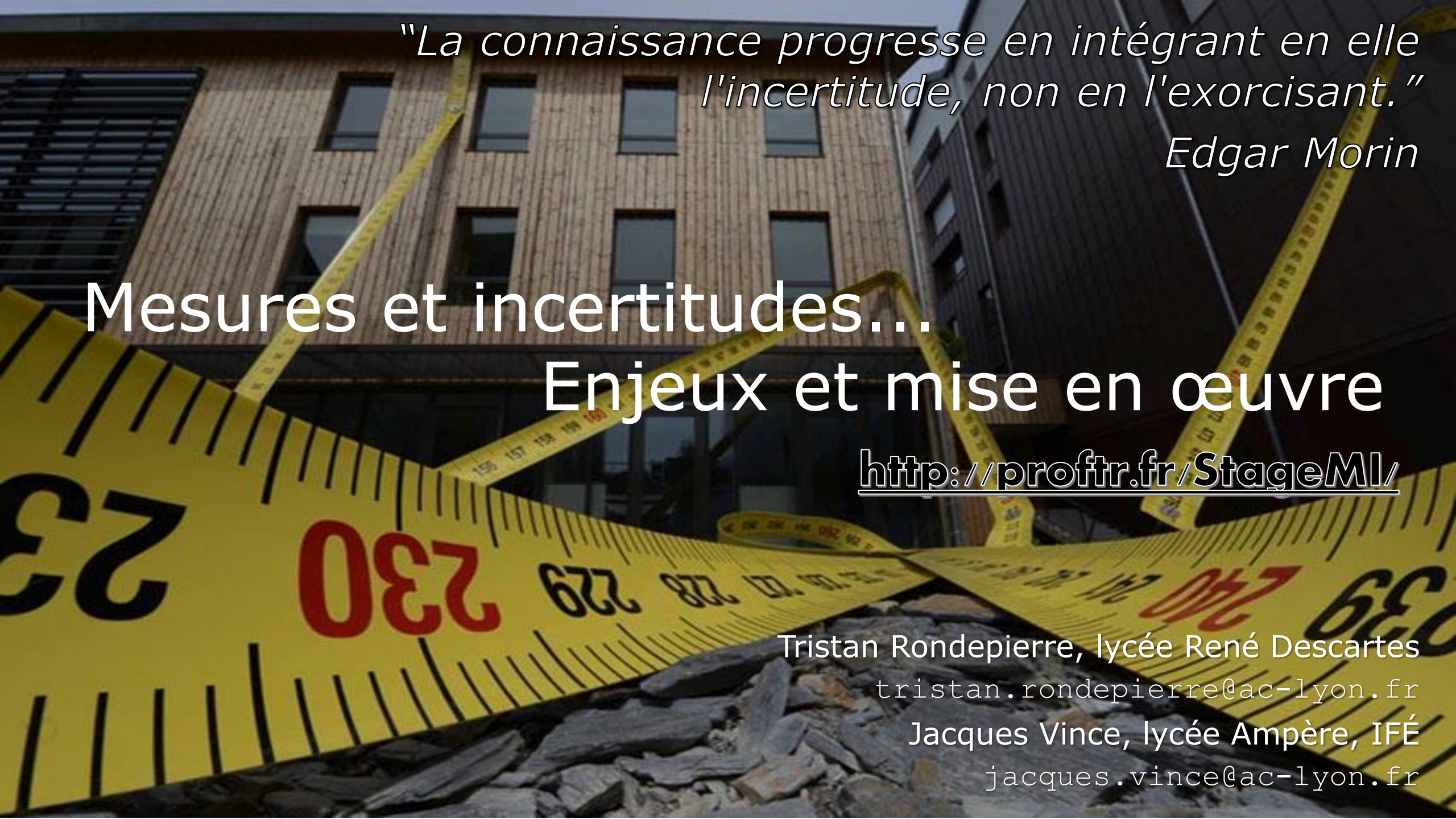
Les présentations





“La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant.”

Edgar Morin

Mesures et incertitudes...
Enjeux et mise en œuvre

http://proftr.fr/StageMI/

Tristan Rondepierre, lycée René Descartes

tristan.rondepierre@ac-lyon.fr

Jacques Vince, lycée Ampère, IFÉ

jacques.vince@ac-lyon.fr

Les incertitudes et moi

Une difficulté d'élève

Une difficulté d'enseignement

Ce que vous visons avec cette formation…

- Mettre en évidence **l'intérêt** de l'enseignement des incertitudes
- Permettre de repérer clairement
  - la structure sur les **trois années** du lycée
  - **ce qui a changé** par rapport aux programmes précédents
- Apporter quelques **éléments théoriques** (qui ne seront pas proposés aux élèves)
- Proposer des **outils pour enseigner** : mémento pour les collègues, poster pour les élèves, exemples d'activités.

Sommaire

- Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?
- **En 2nde** : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée
- **En 1ère** : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B
- **En terminale** : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence

Sommaire

- **Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?**
- **En 2nde** : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée
- **En 1ère** : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B
- **En terminale** : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence

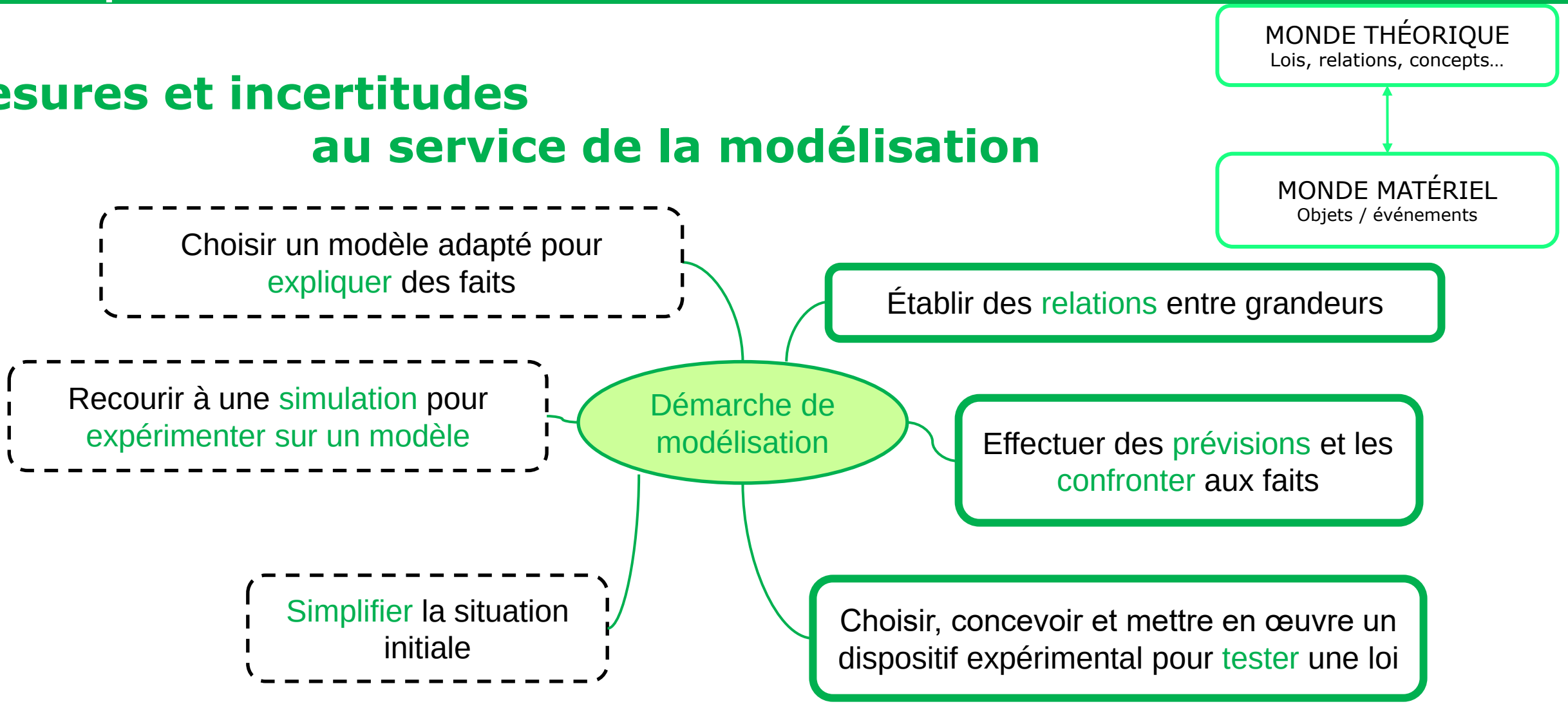
Pourquoi évaluer les incertitudes ?

- Parce que c'est dans les programmes ?
- Parce que les élèves doivent savoir le faire ?
- Parce qu'on ne peut pas connaître la valeur d'une grandeur physique avec une *précision* infinie ?
- Parce que c'est inhérent à toute activité scientifique ?

Derrière les incertitudes, il y a la mesure et donc la modélisation…

Pourquoi évaluer les incertitudes ?

Mesures et incertitudes au service de la modélisation



BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE *Extraits des préambules*

Pourquoi évaluer les incertitudes ?

LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Extraits des préambules

mais valider **QUOI** ???

Compétences	Quelques exemples de capacités associées
S'approprier	- Énoncer une problématique. - Rechercher et organiser l'information en lien avec la problématique étudiée. - Représenter la situation par un schéma.
Analyser/ Raisonner	- Formuler des hypothèses. - Proposer une stratégie de résolution. - Planifier des tâches. - Évaluer des ordres de grandeur. - Choisir un modèle ou des lois pertinentes. - Choisir, élaborer, justifier un protocole. - Faire des prévisions à l'aide d'un modèle. - Procéder à des analogies.
Réaliser	- Mettre en œuvre les étapes d'une démarche. - Utiliser un modèle. - Effectuer des procédures courantes (calculs, représentations, collectes de données etc.). - Mettre en œuvre un protocole expérimental en respectant les règles de sécurité.
Valider	- Faire preuve d'esprit critique, procéder à des tests de vraisemblance. - Identifier des sources d'erreur, estimer une incertitude, comparer à une valeur de référence. - Confronter un modèle à des résultats expérimentaux - Proposer d'éventuelles améliorations de la démarche ou du modèle
Communiquer	À l'écrit comme à l'oral : - Présenter une démarche de manière argumentée, synthétique et cohérente ; utiliser un vocabulaire adapté et choisir des modes de représentation appropriés ; - Échanger entre pairs.

Pourquoi évaluer les incertitudes ?

VALIDER n'est pas une opération binaire…

Les incertitudes viennent au secours de l'adéquation entre modèle et faits.

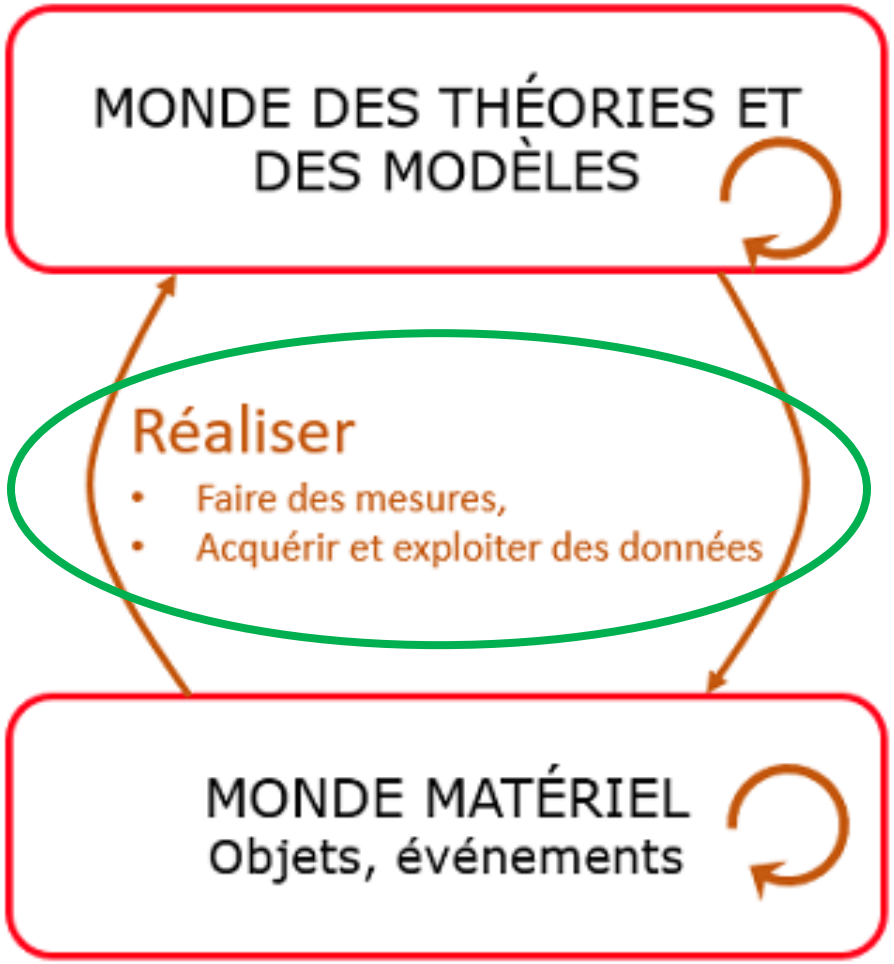
- Peut-on **vérifier/tester** les lois de Descartes sans évoquer les incertitudes ?
- Peut-on **vérifier** une prévision quantitative sans incertitude ?
- Peut-on **induire**, **utiliser** ou **tester** $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ sans avoir recours aux incertitudes ?

Pour **estimer** la validité d'un modèle,
il faut faire des mesures
et estimer les incertitudes liées

→ Les incertitudes ont une place importante
dans les démarches scientifiques
elles ne sont pas un *luxe inutile*

Pourquoi évaluer les incertitudes ?

Mesures et incertitudes au service de la modélisation



Réaliser

- Traiter/utiliser un modèle
- Effectuer des procédures courantes (calcul littéral et numérique, représentations, écriture d'un résultat, analyse dimensionnelle…)

Réaliser

- Décrire une observation
- Réaliser un protocole donné ou conçu
- Faire des choix expérimentaux pertinents
- Utiliser du matériel en respectant les règles de sécurité

Source : Eduscol

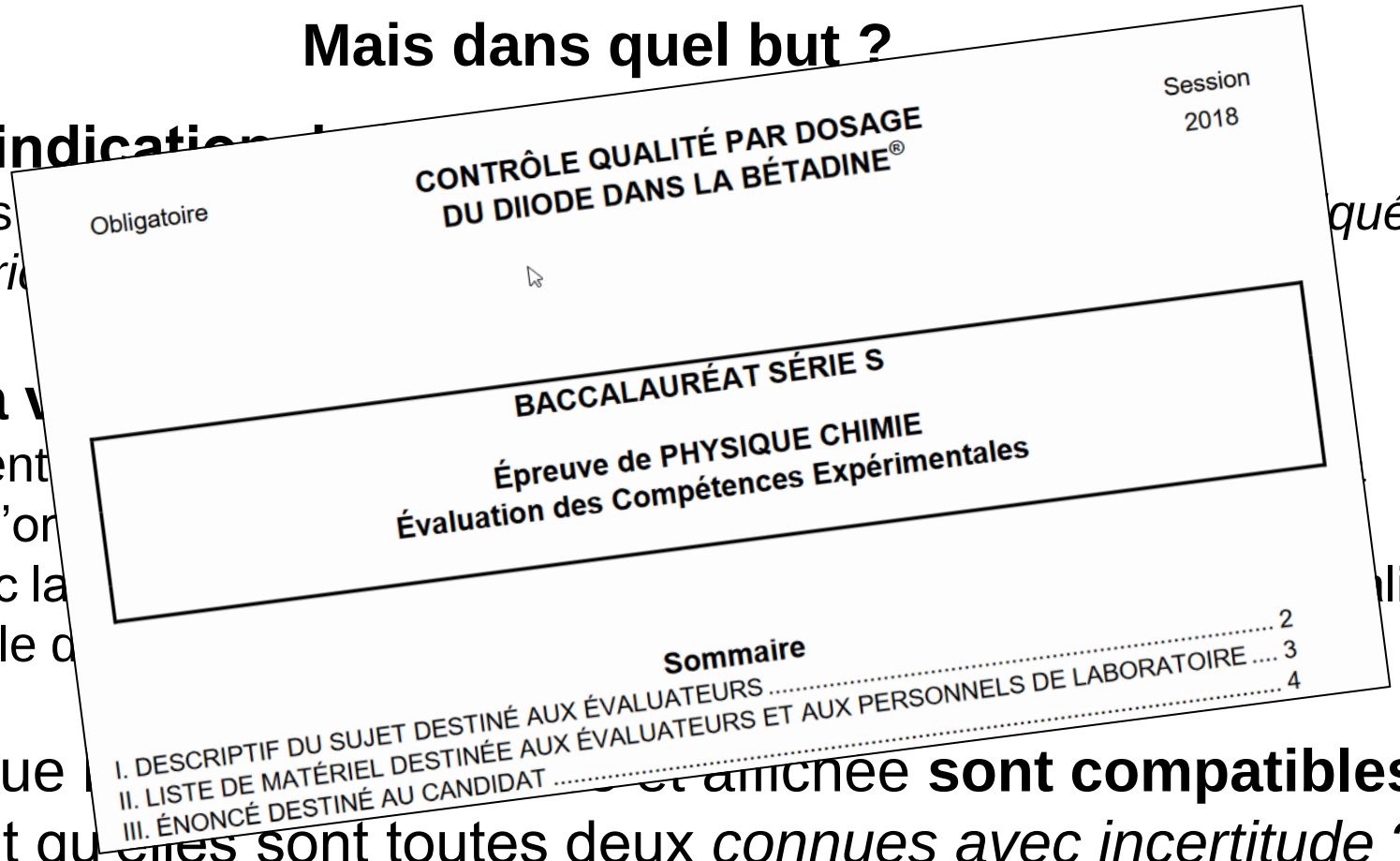
Pourquoi évaluer les incertitudes ?

Mesures, incertitude et comparaison de deux valeurs



Une activité classique : on demande aux élèves de mesurer la teneur massique en diiode par titrage.

Mais dans quel but ?


Obligatoire

CONTRÔLE QUALITÉ PAR DOSAGE DU DIIODE DANS LA BÉTADINE®

Session 2018

BACCALAURÉAT SÉRIE S

Épreuve de PHYSIQUE CHIMIE
Évaluation des Compétences Expérimentales

Sommaire

I. DESCRIPTIF DU SUJET DESTINÉ AUX ÉVALUATEURS 2
II. LISTE DE MATÉRIEL DESTINÉE AUX ÉVALUATEURS ET AUX PERSONNELS DE LABORATOIRE 3
III. ÉNONCÉ DESTINÉ AU CANDIDAT 4

- Valider **l'indicati**
  longtemps *quée*
  par le fabri
- Valider **la v**
  Cela revient
  vérifier qu'or
  C'est donc la lider,
  et non celle d
- Vérifier que l et affichée **sont compatibles** en assumant qu elles sont toutes deux *connues avec incertitude* ?
  suppose de définir un critère de *compatibilité*.

Pourquoi évaluer les incertitudes ?

Mesures, incertitude et comparaison de deux valeurs



Une conclusion *autrefois* en vogue : l'écart relatif

$$\varepsilon = \left|\frac{t_{exp} - t_{ref}}{t_{ref}}\right| = \frac{10 - 8{,}6}{10} = 14\%$$

on ne fait donc pas un contrôle qualité de la bétadine mais plutôt un contrôle qualité du dosage !

Et alors ? 14% c'est "bon" ou "mauvais" ?
… et cette question a-t-elle un sens ?

Pourquoi évaluer les incertitudes ?

Mesures, incertitude et comparaison de deux valeurs



Ce que l'ancien programme nous incitait à faire

Imaginons un élève qui a trouvé : $t(I_2) = (8{,}9 \pm 0{,}6)\%$

Les 10% attendus n'appartiennent pas à l'intervalle

Conclusions possibles (...

préc...

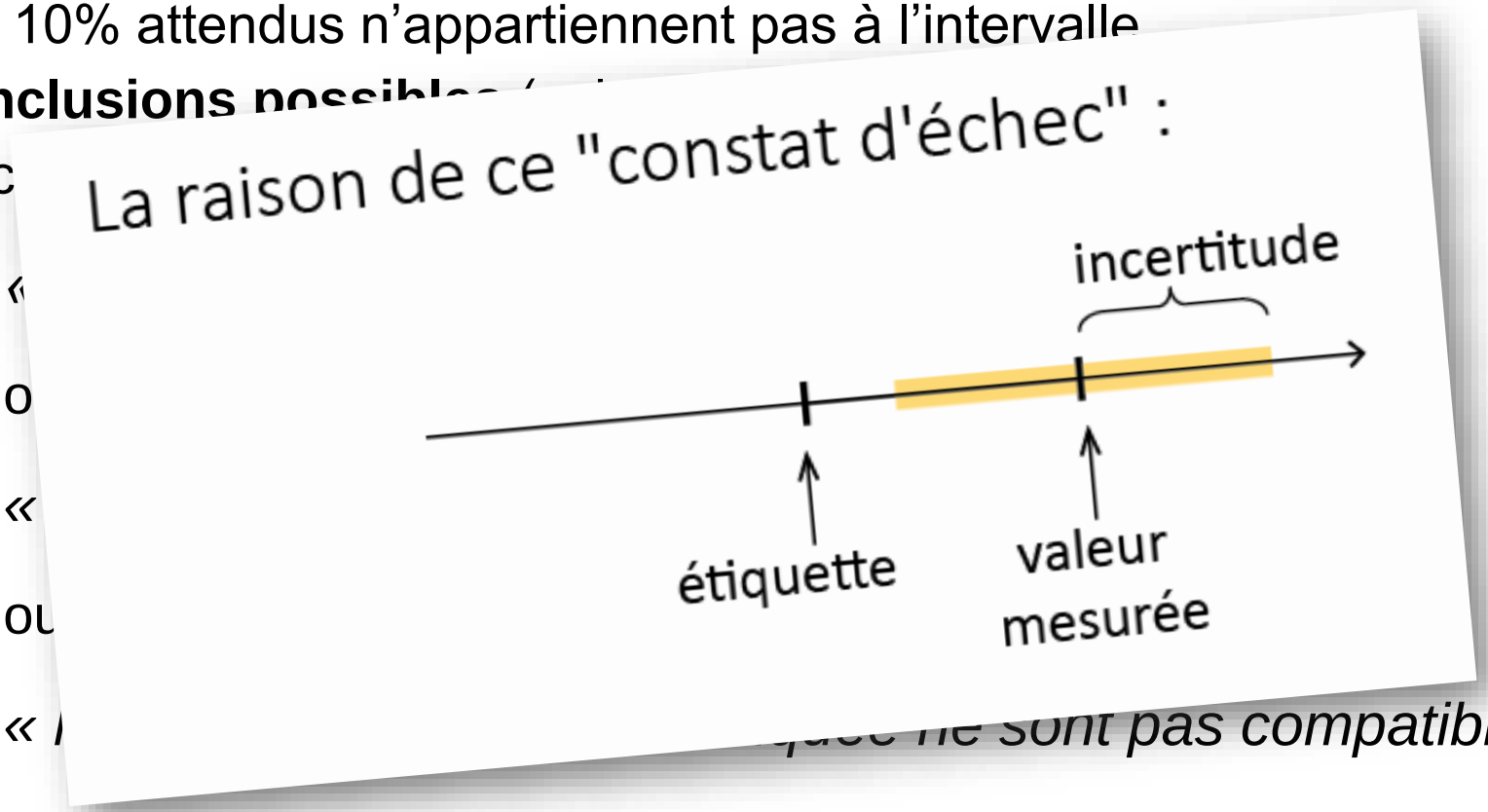
« ...

o...

« ...

ou...

« ... *...que ne sont pas compatibles.* »



Pourquoi évaluer les incertitudes ?

Mesures, incertitude et comparaison de deux valeurs



Or :

➔ L'incertitude indique l'intervalle dans lequel la valeur mesurée a *une certaine probabilité* de se trouver.

- si le même élève recommence exactement dans les mêmes conditions, il est possible qu'il obtienne la conclusion inverse ;
- si un autre élève trouve que la valeur affichée est compatible avec sa mesure (et l'intervalle lié), ça peut très bien être un hasard ;

➔ La valeur affichée par le fabricant, elle aussi, a une incertitude.

- L'incertitude de la valeur affichée est très rarement connue.
- Si on la connaît, elle aussi délimite un intervalle de valeurs probables : c'est la confrontation des 2 intervalles qui a du sens.

Pourquoi évaluer les incertitudes ?

ADIEU l'écart relatif pour discuter de la validité d'une mesure

Pour toutes les raisons précédentes, on n'utilise plus l'écart relatif pour discuter de la validité d'une mesure.



Pour achever (l'écart relatif) :
l'influence de la "valeur de référence"

$$\varepsilon = \left| \frac{\theta_{mes} - \theta_{ref}}{\theta_{ref}} \right| = \cdots$$

Mais ici la valeur de référence vaut 0°C !

Pourquoi changer ?

Ce qui a suscité les évolutions…

- Des **mises en œuvre hétérogènes**, des pratiques peu stabilisées
  → *faire plus simple et plus clair*

- Des **dérives calculatoires** qui contribuaient à faire perdre toute signification
  → *retrouver du sens en limitant les techniques*

- Un **surinvestissement de l'intervalle de confiance**, mal compris et mal utilisé
  → *ne figer ni les bornes d'intervalle ni le critère de confiance mais comparer deux mesures du point de vue de leur incertitude-type*

- Une **difficulté à articuler** les incertitudes **avec les règles sur les CS**
  → *pas totalement levée, à condition de revoir nos points de vue sur les CS*

- Utiliser le **paradigme scientifique actuel**
  → *du paradigme de l'erreur à celui de l'incertitude*

De nouvelles orientations

Les objectifs des nouveaux programmes

- insister sur **l'aspect statistique** d'une mesure avec l'introduction, dès la seconde, de mesures répétées

  → *faire émerger la notion d'incertitude comme un estimateur de la dispersion*

- pendant les trois années de lycée, estimer les **incertitudes-type** et non plus les incertitudes élargies

  → *ne figer ni les bornes d'intervalle ni le critère de confiance mais comparer deux mesures du point de vue de leur incertitude-type*

- disposer d'un outil de comparaison qui tient compte de l'incertitude

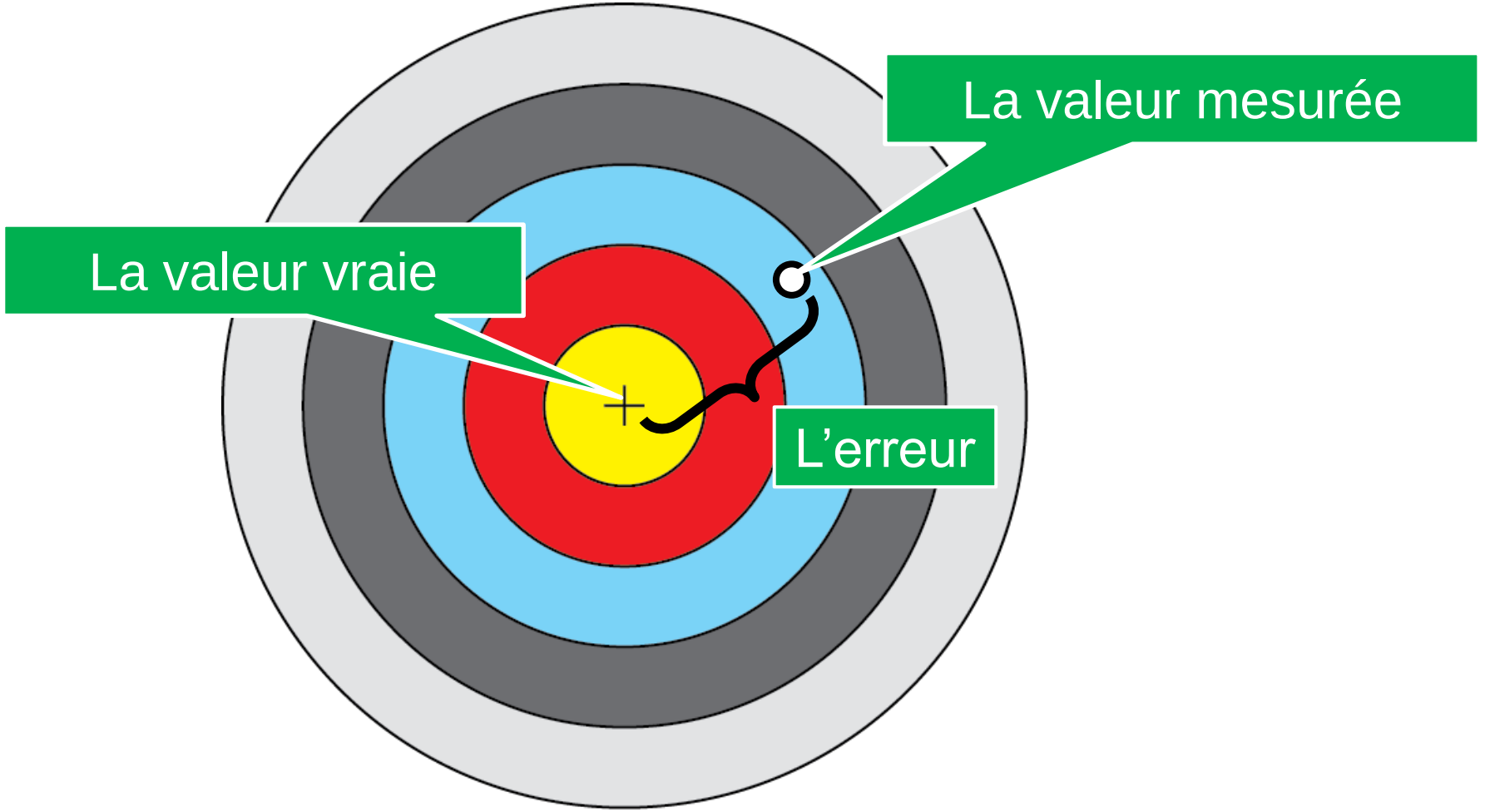
  → *en finir avec les « effets de seuil » conduisant à dire qu'une mesure est bonne ou mauvaise ;*

- en finir avec les intervalles de confiance, facteurs $\sqrt{\frac{1}{12}}$ et autres facteurs de Student…

intention souvent énoncée oralement mais que n'implique pas le passage aux incertitudes-types.
À nous de décider jusqu'à quel point on respecte l'orthodoxie de la métrologie !

De nouvelles orientations

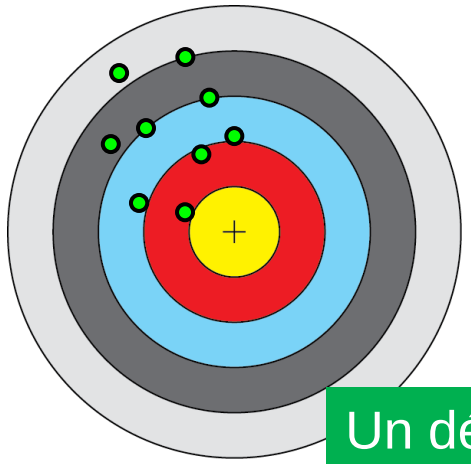
L’approche « erreur » qui guidait les anciens programmes



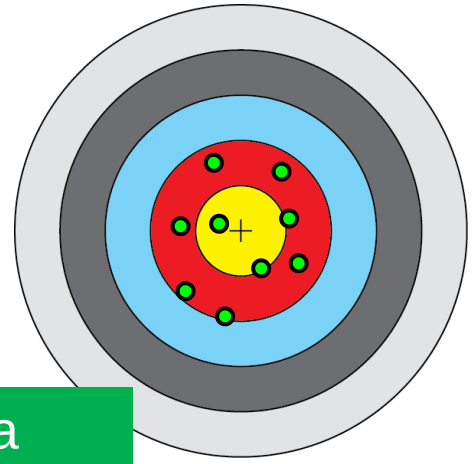
Incertitude = estimation de l’erreur probable

De nouvelles orientations

L'approche « erreur » qui guidait les anciens programmes

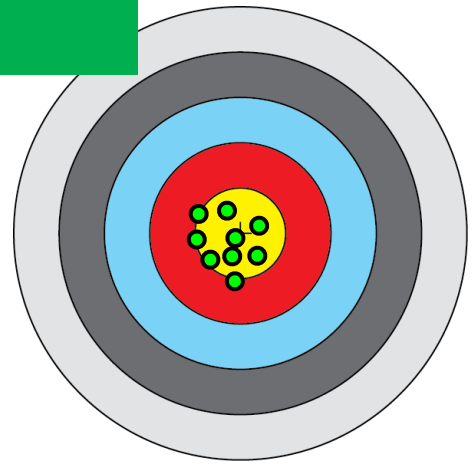


mesure plus **fidèle**



mesure
plus **juste**

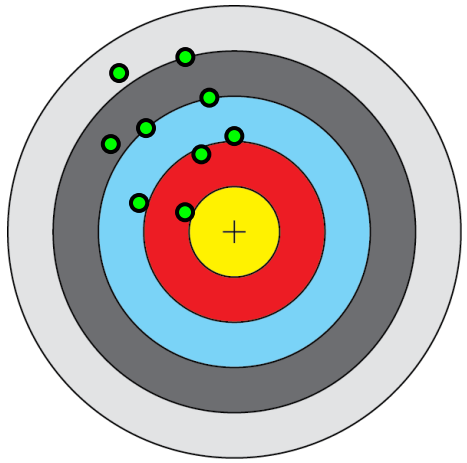
Un défaut de cette approche : la valeur vraie n'est **jamais connue**…
donc l'erreur non plus !

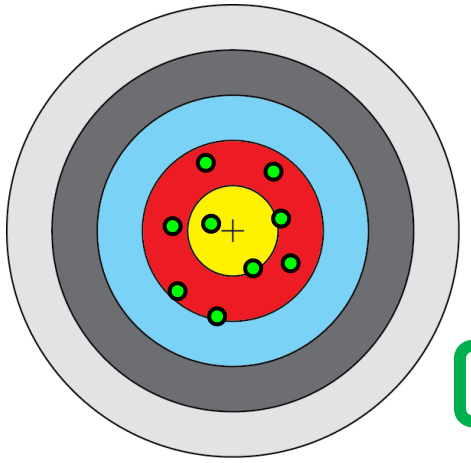


mesure
plus **fidèle** et plus **juste**

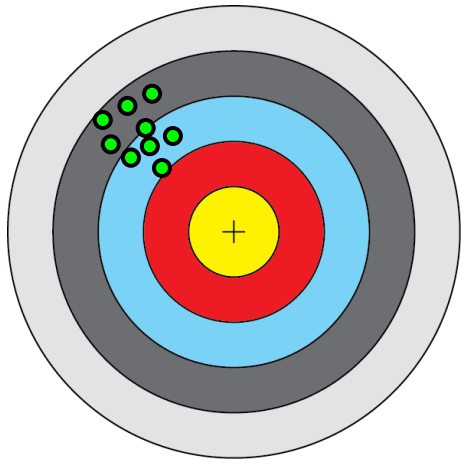
De nouvelles orientations

L'approche « erreur » qui guidait les anciens programmes

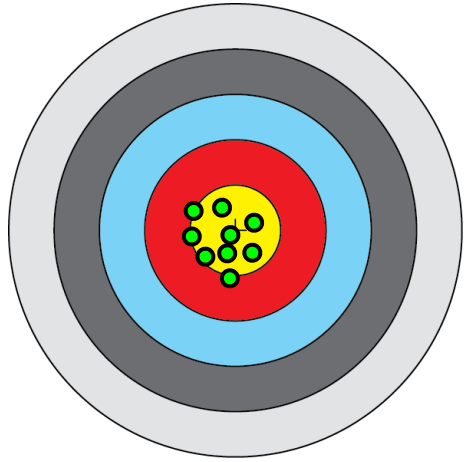




mesure
plus **juste**



mesure plus
fidèle



mesure
plus **fidèle** et plus **juste**

cela a-t-il encore un sens ?

L'approche « incertitude » désormais préconisée se passe de la notion de « valeur vraie »… donc de la notion d'erreur !

De nouvelles orientations

Quelques conséquences au sujet du vocabulaire

L'approche dite « incertitude » du BIPM (1995)

L'incertitude ne quantifie pas un écart à la « valeur vraie ».

on ne parle plus de valeur vraie

on ne parle plus d'erreur (ni aléatoire ni systématique)

une valeur de référence pourra être comparée à la valeur mesurée





célérité de la lumière dans la vide :
299 792 458 $m.s^{-1}$



De nouvelles orientations

Quelques conséquences au sujet du vocabulaire

L'approche dite « incertitude » du BIPM (1995)

On évalue les **incertitudes-type** et non plus les incertitudes élargies

- ➔ *l'incertitude-type est **l'estimation** de la dispersion des valeurs attribuables à la grandeur mesurée : l'outil adapté est l'écart-type*
- ➔ *l'incertitude-type permet de comparer deux mesures du point de vue de la dispersion*
- ➔ *l'incertitude-type fait partie du résultat d'une mesure*
- ➔ *l'incertitude-type d'une mesure est notée u(x)*

De nouvelles orientations

Quelques conséquences au sujet du vocabulaire

L'approche dite « incertitude » du BIPM (1995)

On ne parle plus d'**écart relatif**

→ *Mais on utilisera **l'incertitude-type u** pour juger de la validité de la mesure*

Les programmes

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

En seconde

En première

En terminale *générale*

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique** : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur ou d'un langage de programmation.
Incertitude-type.	Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.
Incertitudes-types composées.	Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs dont les incertitudes-types associées sont connues. **Capacité numérique** : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées.
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.

Sommaire

- Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?
- **En 2nde** : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée
- **En 1ère** : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B
- **En terminale** : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence

Sommaire

- Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?
- **En 2nde : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée**
- **En 1ère** : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B
- **En terminale** : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence

Expériences sur la verrerie en chimie

Chacun d'entre vous dispose de 3 éléments de verrerie :





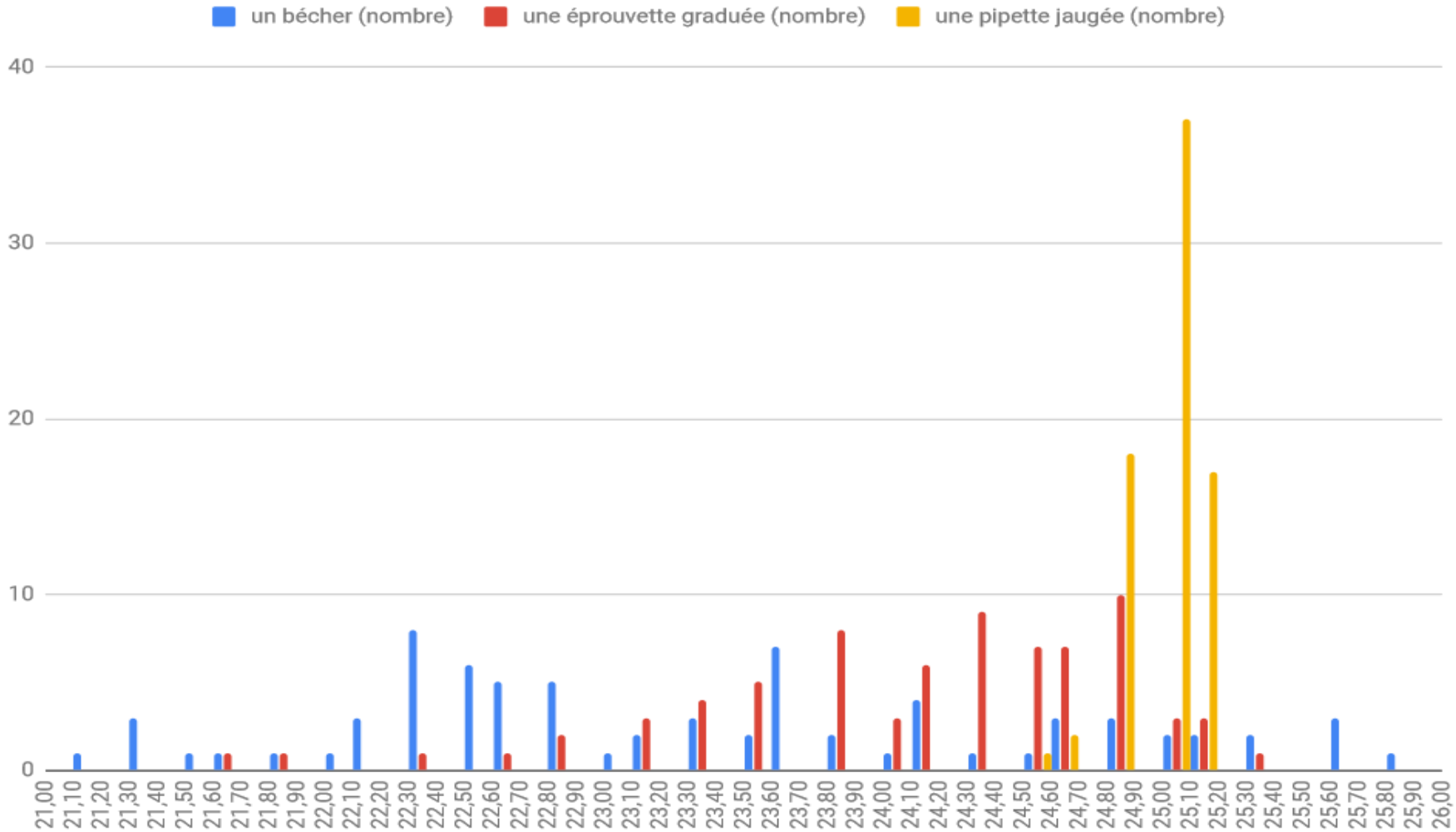


Avec chacun d'eux, **à 5 reprises** :

- prélever 25 mL d'eau distillée ;
- peser l'eau prélevée
- noter la masse obtenue sur la feuille de saisie en ligne →

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

Expériences sur la verrerie en chimie





Un peu de théorie

Erreur - incertitude

- l'**erreur** est la différence entre la valeur mesurée x et la valeur vraie (que l'on ne connaît pas)
- l'**incertitude** $u(x)$ u (pour *uncertainty*) traduit les tentatives scientifiques pour estimer l'importance de l'erreur commise lors de la mesure.

L'écriture du résultat d'une mesure doit faire apparaître cette incertitude.

Par convention, le résultat d'une mesure s'écrit conventionnellement (*mais pas forcément au lycée*) :

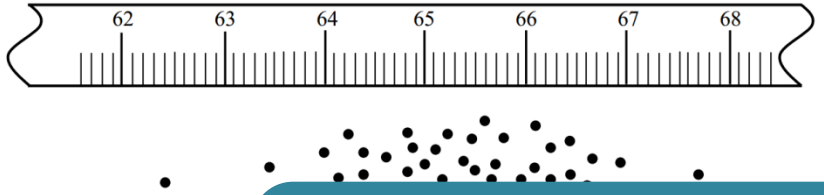
$$x = \bar{x} \pm u(x)$$

où $\bar{x}$ est la meilleure estimation de la grandeur et $u(x)$ l'incertitude correspondante.

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

De la théorie pure et dure : l'évaluation de **type A**

On procède à une évaluation de type A si incertitude évaluable par une **méthode statistique.**



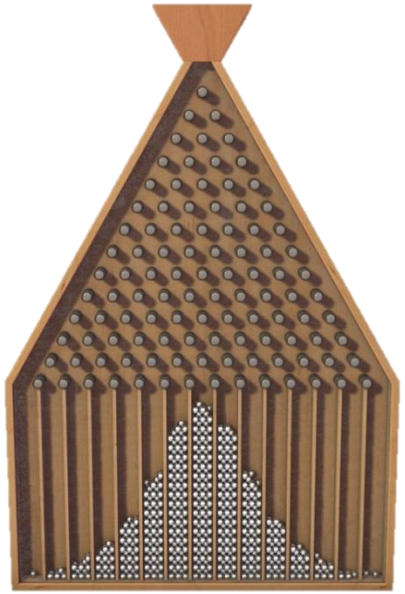
Comme aujourd'hui, avec les élèves on s'autorisera quelques entorses !

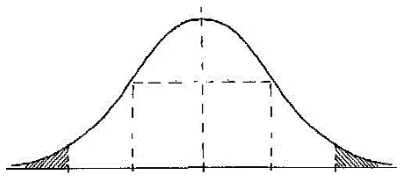
C'est le cas (en toute rigueur) lors d'une mesure répétée :

- Par le même opérateur
- Avec le même matériel
- En appliquant le même protocole

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

D’où viennent ces courbes « en cloche » ?







Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

D’où viennent ces courbes « en cloche » ?

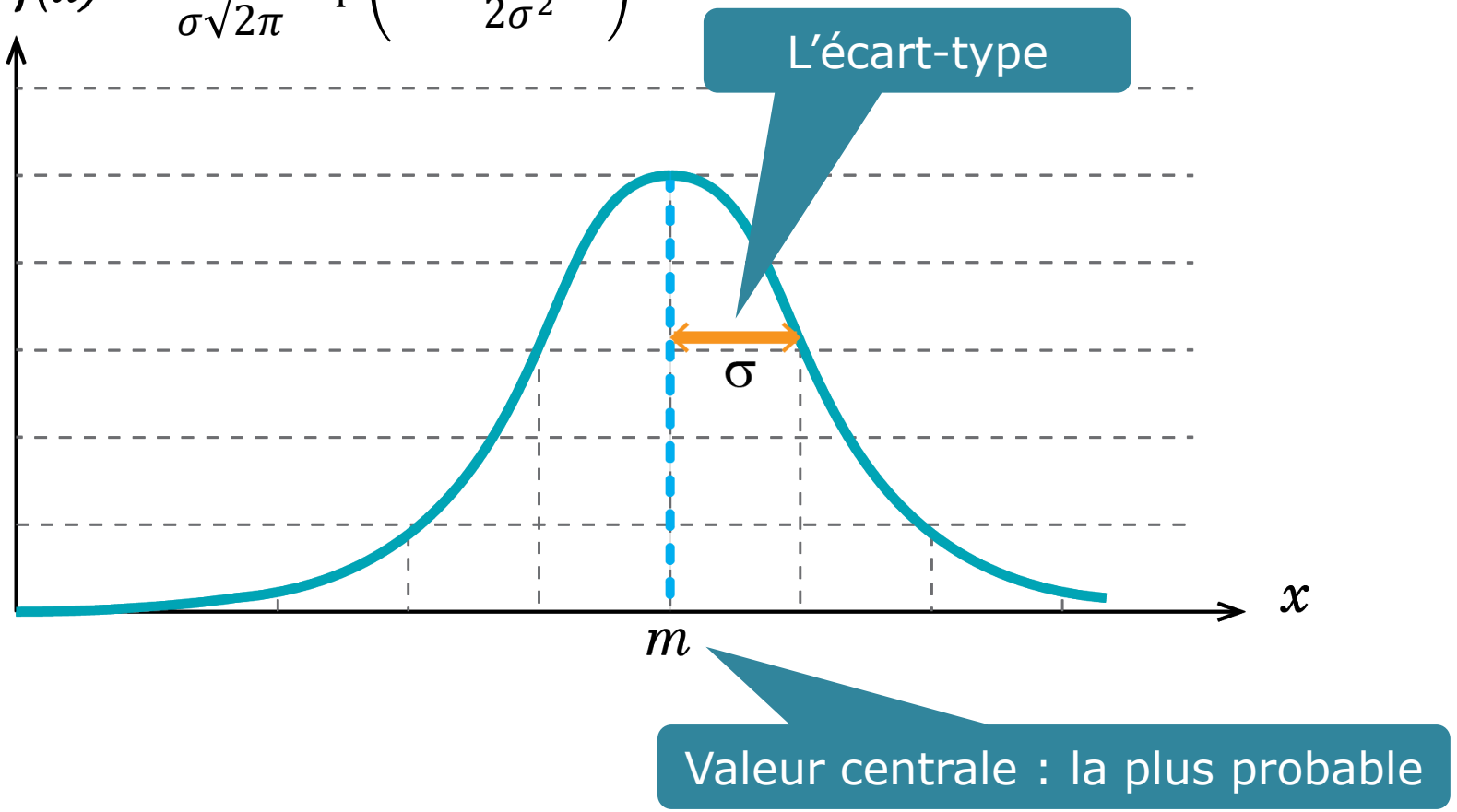


Quelques programmes en Python qui permettent de le comprendre.

La loi normale ou loi gaussienne

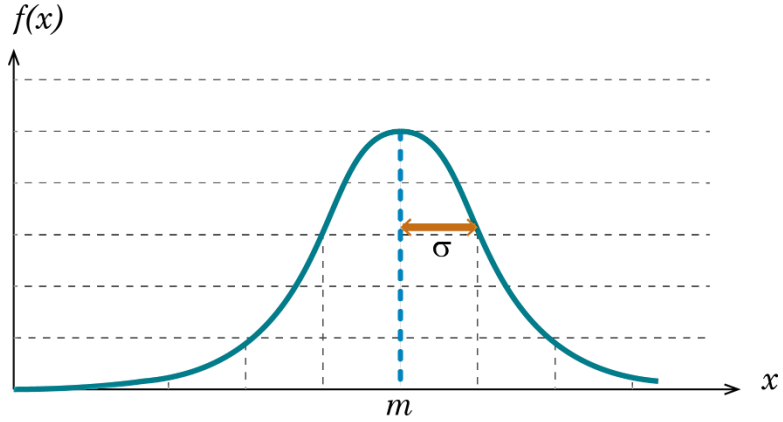
Deux grandeurs pour caractériser une loi normale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$



La loi normale ou loi gaussienne

Deux grandeurs pour caractériser une loi normale



- m est **la moyenne** :

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

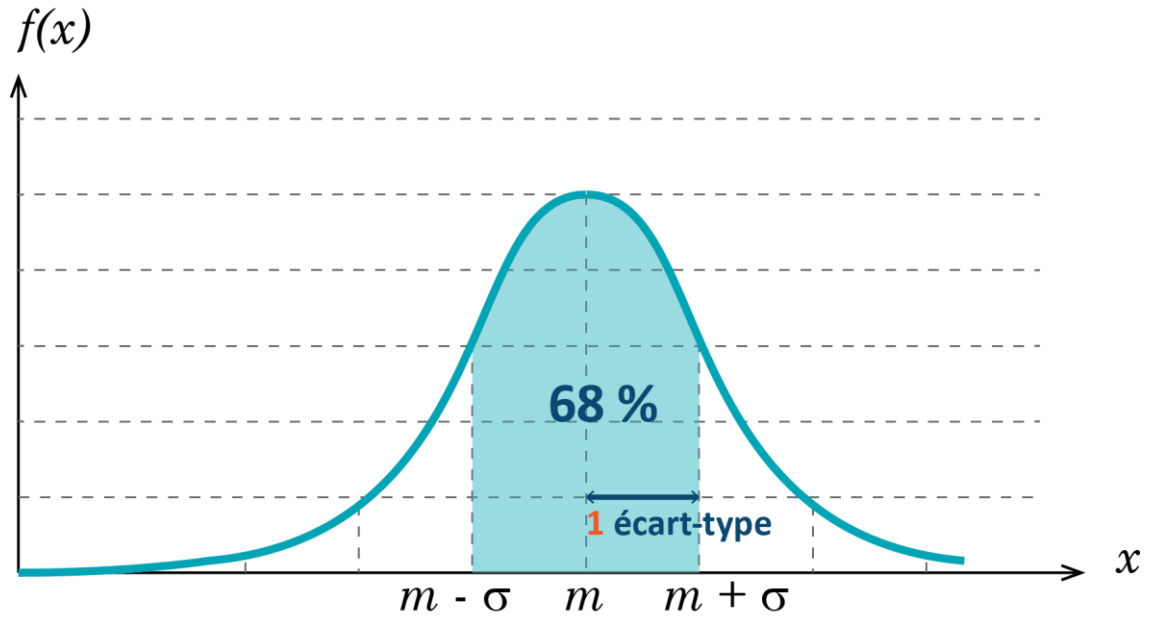
- σ est **l'écart-type** ou écart quadratique moyen… *à ne pas confondre avec l'écart-type expérimental !*

La loi normale ou loi gaussienne

On montre que :

$$\int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f(x)\,dx \approx 0,68$$

la probabilité de trouver UNE mesure dans l'intervalle $[m-\sigma; m+\sigma]$ vaut **68%**

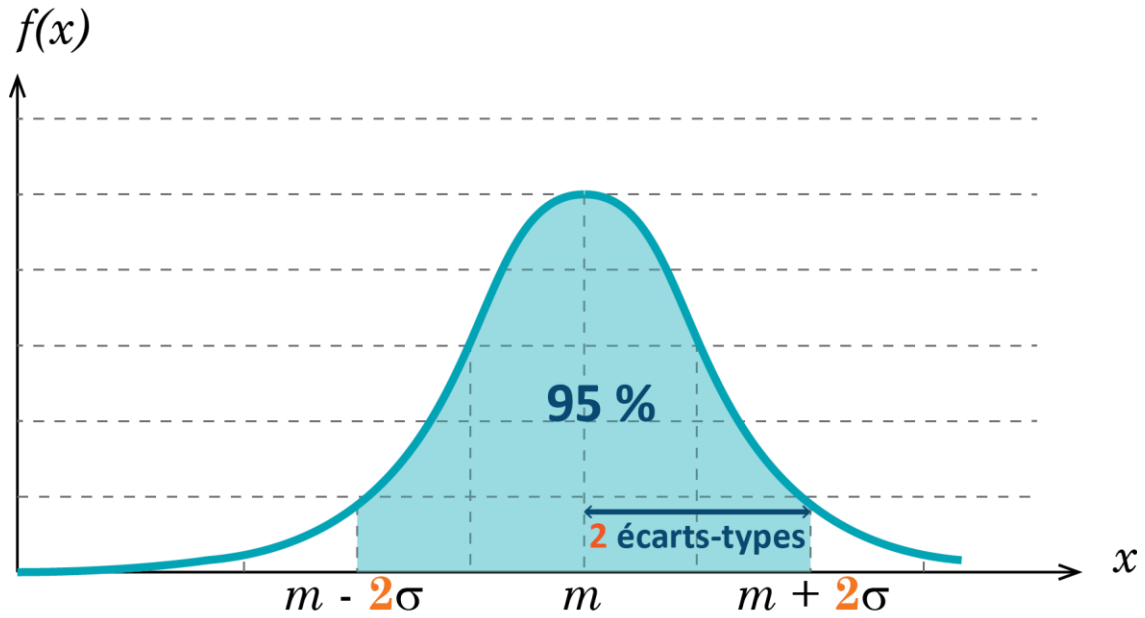


La loi normale ou loi gaussienne

On montre que :

$$\int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} f(x)\,dx \approx 0,95$$

la probabilité de trouver UNE mesure dans l'intervalle $[m-2\sigma;\mathrm{m}+2\sigma]$ vaut **95%**

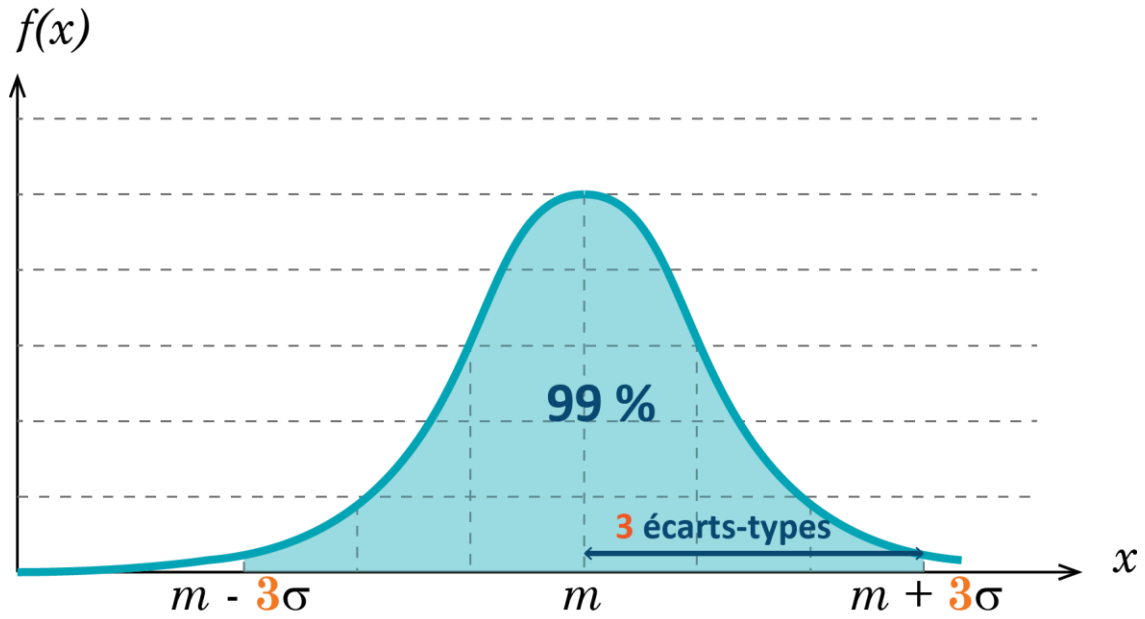


La loi normale ou loi gaussienne

On montre que :

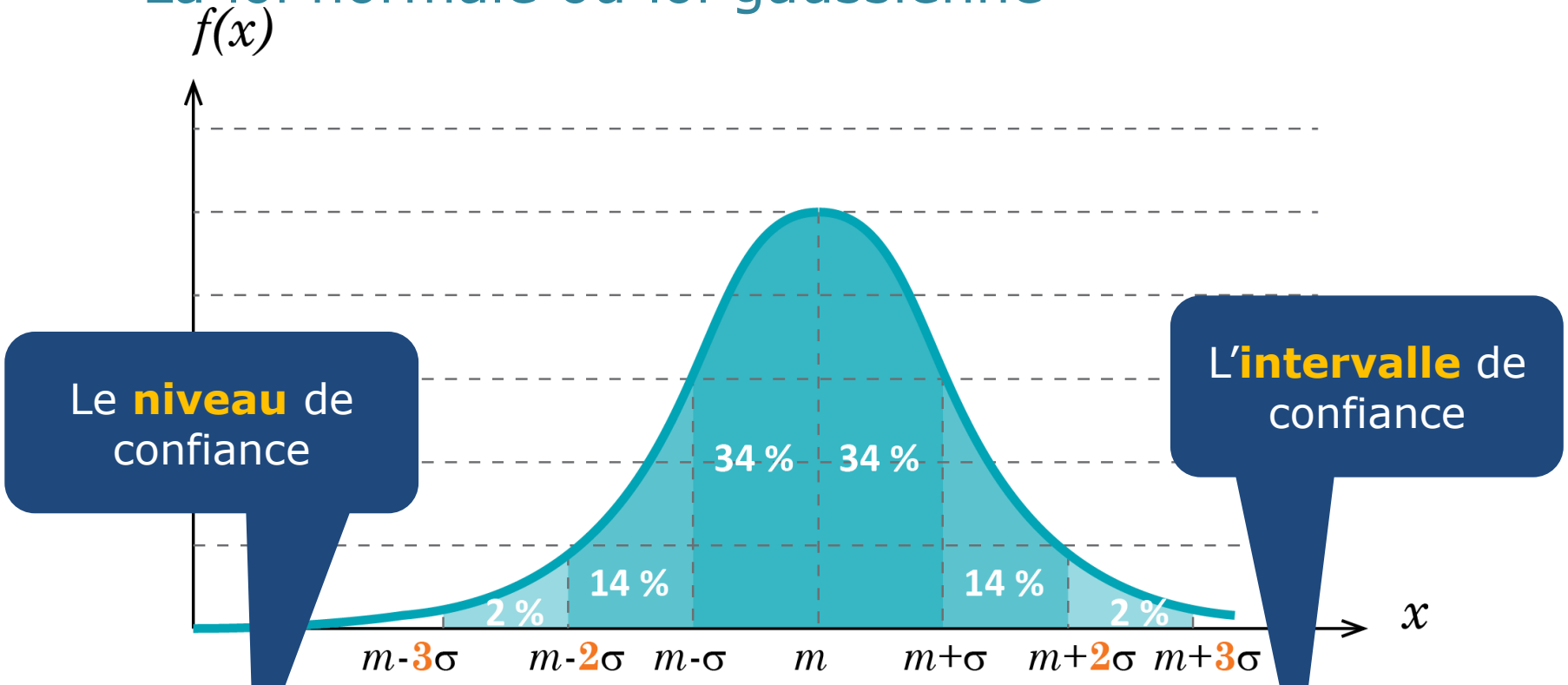
$$\int_{m-3\sigma}^{m+3\sigma} f(x)\,dx \approx 0,99$$

la probabilité de trouver UNE mesure dans l'intervalle $[m-3\sigma;\mathrm{m}+3\sigma]$ vaut **99%**



Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

La loi normale ou loi gaussienne



Le **niveau** de confiance

L'**intervalle** de confiance

Le résultat d'une mesure a :

- 68% de chances de se trouver dans l'intervalle $[m-\sigma\ ;m+\sigma]$
- 95% de chances de se trouver dans l'intervalle $[m-2\sigma\ ;m+2\sigma]$
- 99% de chances de se trouver dans l'intervalle $[m-3\sigma\ ;m+3\sigma]$

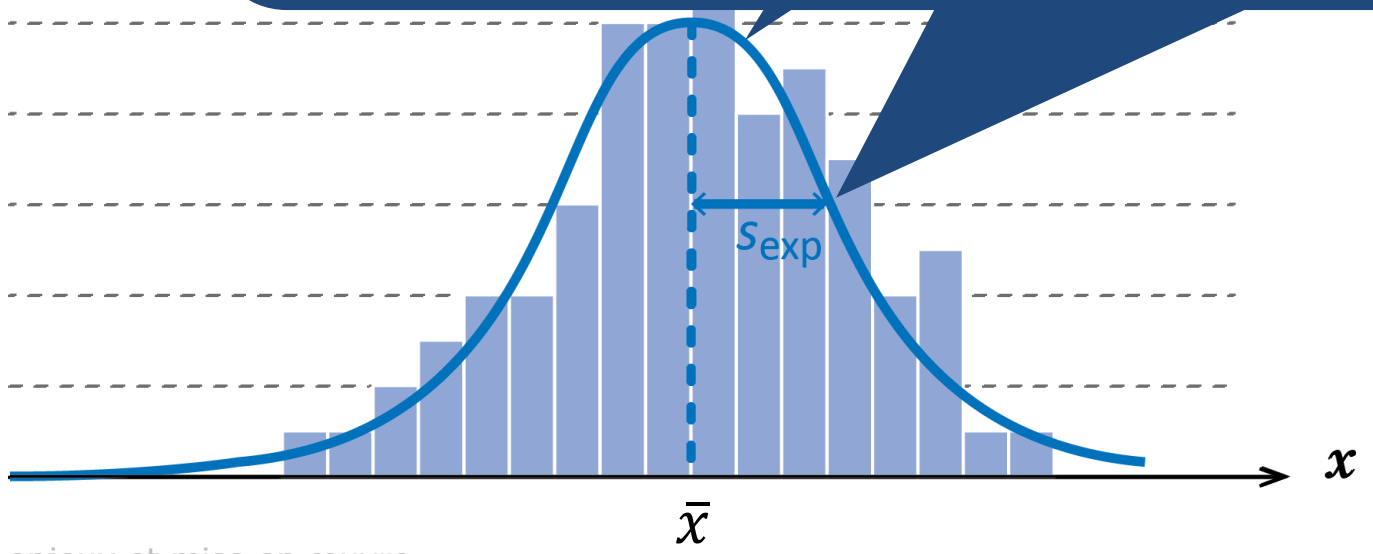
L'évaluation de **type A**

Mesures multiples d'une grandeur

Mais, au fait, on n'a pas réalisé une infinité de mesures ?!

L'écart-type de la série ou « **écart type expérimental** », que l'on peut estimer par :

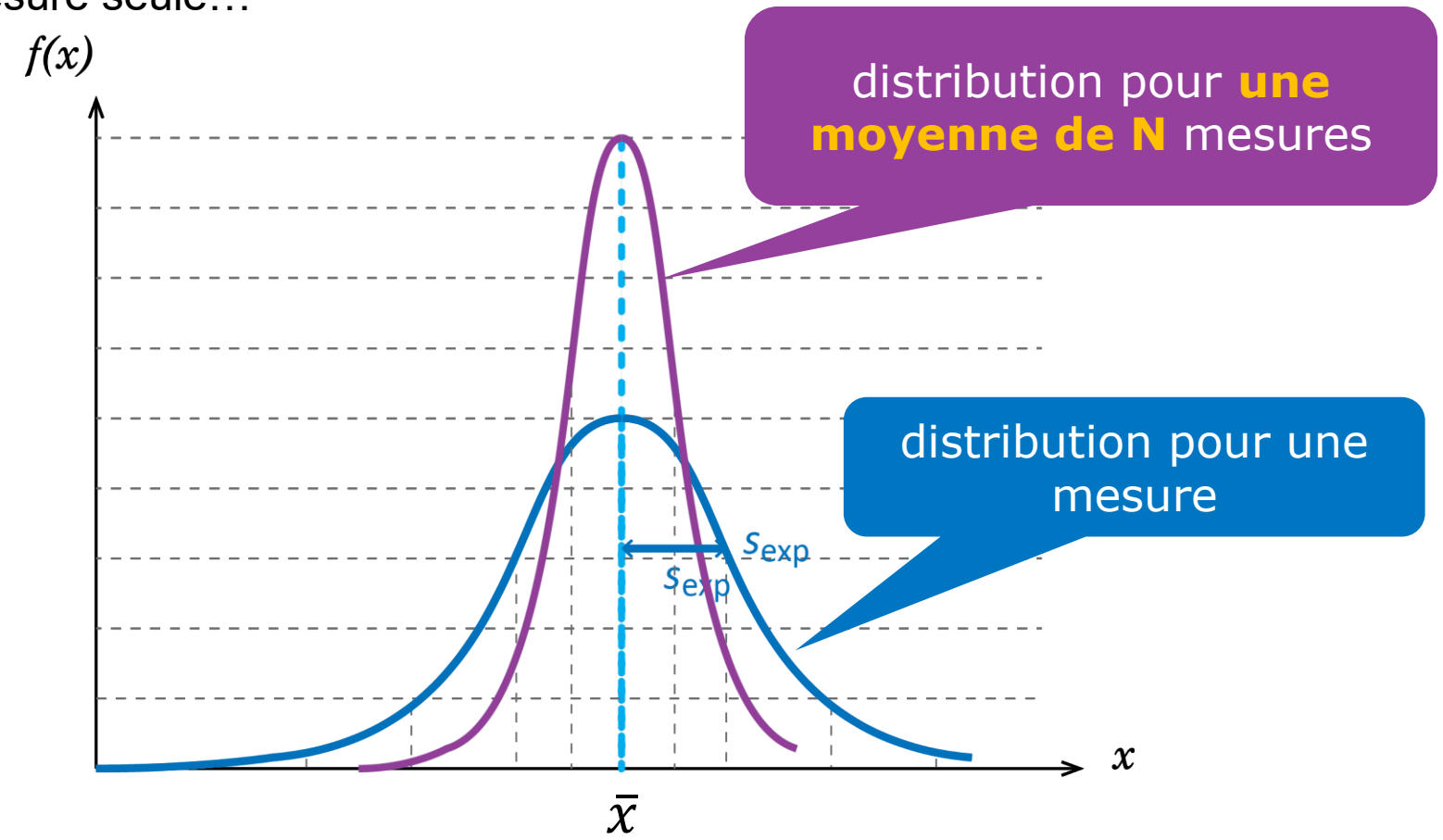
$$s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$



L'évaluation de **type A**

Mesures multiples d'une grandeur

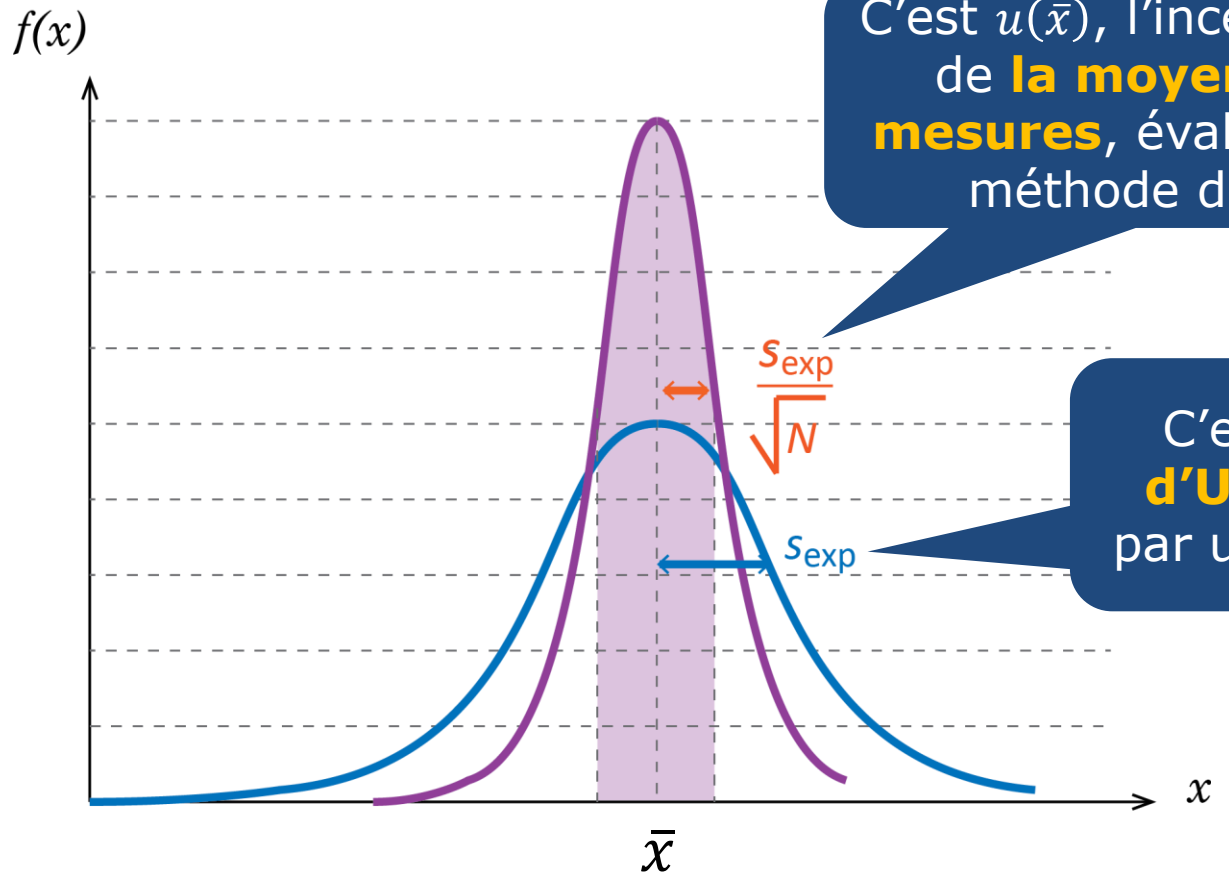
L'estimation à partir d'une moyenne de N mesures est « meilleure » que sur une mesure seule…



L'évaluation de **type A**

Mesures multiples d'une grandeur

L'estimation à partir d'une moyenne de N mesures est « meilleure » que sur une mesure seule…



C'est $u(\bar{x})$, l'incertitude-type de **la moyenne de N mesures**, évaluée par une méthode de type A

C'est $u(x_i)$, l'incertitude **d'UNE mesure**, évaluée par une méthode de type A



L'évaluation de **type A : récapitulons !**

On dispose d'une série de *N* mesures d'une grandeur X à l'aide d'un instrument qui donne les résultats : $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_N$: c'est **l'échantillon**

- L'écart-type de l'échantillon est estimé par :

$$s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

parfois noté σ_{N-1}
C'est l'incertitude-type d'**UNE** mesure
n'appartenant pas forcément à l'échantillon

- Si l'on réalise N' mesures (*pas forcément les N mesures de l'échantillon*) :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N'}}{N'} = \frac{\sum x_i}{N'}$$

moyenne des *N'* mesures

$$u(\bar{x}) = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N'}} = \sqrt{\frac{1}{N'(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

incertitude-type **de la moyenne des *N'* mesures**

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs



Et sur les calculatrices ?

Des deux écarts-types, lequel choisir ?…

Écart-type de la population :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

Parfois noté σ_x ou $x\sigma_n$

Écart-type de l'échantillon :

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Parfois noté $x\sigma_{n-1}$

À diviser par $\sqrt{n}$ pour avoir l'incertitude-type sur la moyenne de la série de n mesures

Une consigne simple :

Si la calculatrice ou le tableur propose deux écarts – types…

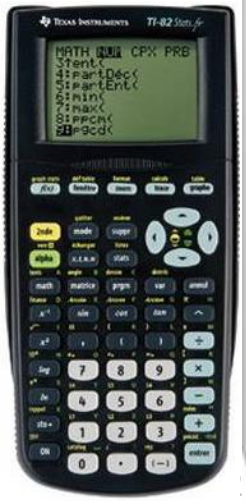
Choisir le plus élevé !

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

Et sur les calculatrices ?

Des deux écarts-types, lequel choisir ?…

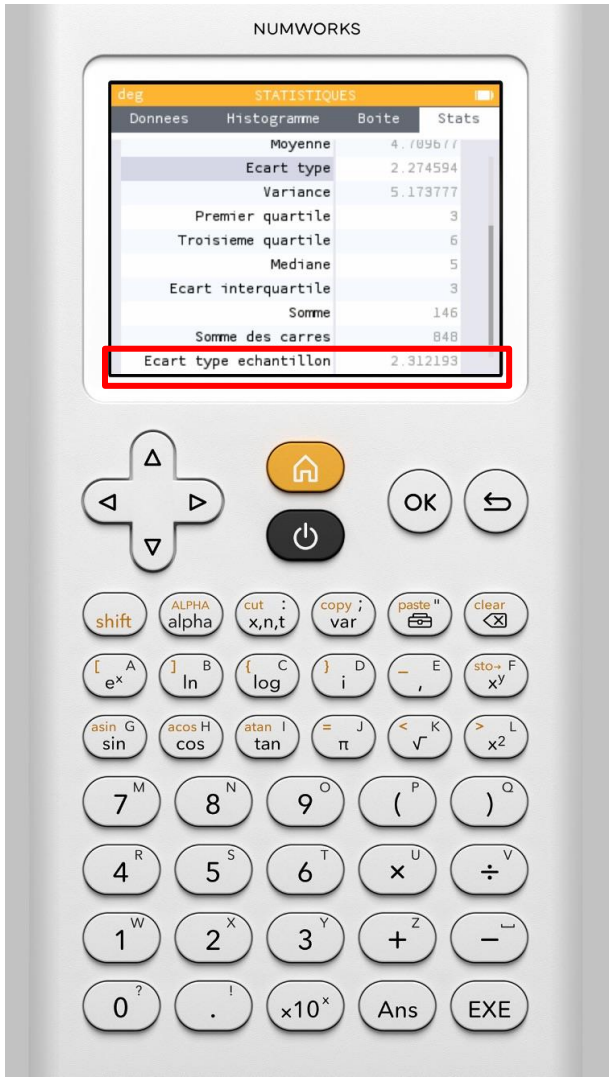






1 n	Nombre de données
2 $\bar{x}$	Moyenne des données de l'échantillon
3 $x\sigma n$	Ecart-type de la population
4 $x\sigma n-1$	Ecart-type de l'échantillon

fx-92 Collège 2D



Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs



L'évaluation de **type A**

Revenons à notre activité verrerie…

On a trouvé :

$\bar{V} = 24{,}823\ \text{mL}$

$u(V) = \frac{\sigma_{exp}}{\sqrt{N}} = 0{,}032\ \text{mL}$

Incertitude – type
notée $u(m)$

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Écriture du résultat :

$\bar{V} = (24{,}823 \pm 0{,}032)$ mL, (68%)

$\bar{V} = (24{,}823 \pm 0{,}064)$ mL, (95%)

Incertitude élargie
$U(m) = k \times u(m)$
Ici : $k_{95\%} = 1{,}96 \approx 2$

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs



Que dire aux élèves ? Qu'attendre d'eux ?

Programme de 2nde 2019 :

LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique** : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.
Incertitude-type.	Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.

On ne parle que de **l'incertitude – type**
On ne parle plus d'élargissement : cela revient à considérer qu'un niveau de confiance de 68% suffit si la distribution est normale.

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

Différentes façons d'écrire un résultat

1. $x \in [x_1 \ ; \ x_2]$

2. $\bar{x} - \mathrm{u}(x) \leq x < \bar{x} + u(x)$

3. $x = \bar{x} \pm \mathrm{u}(x)$

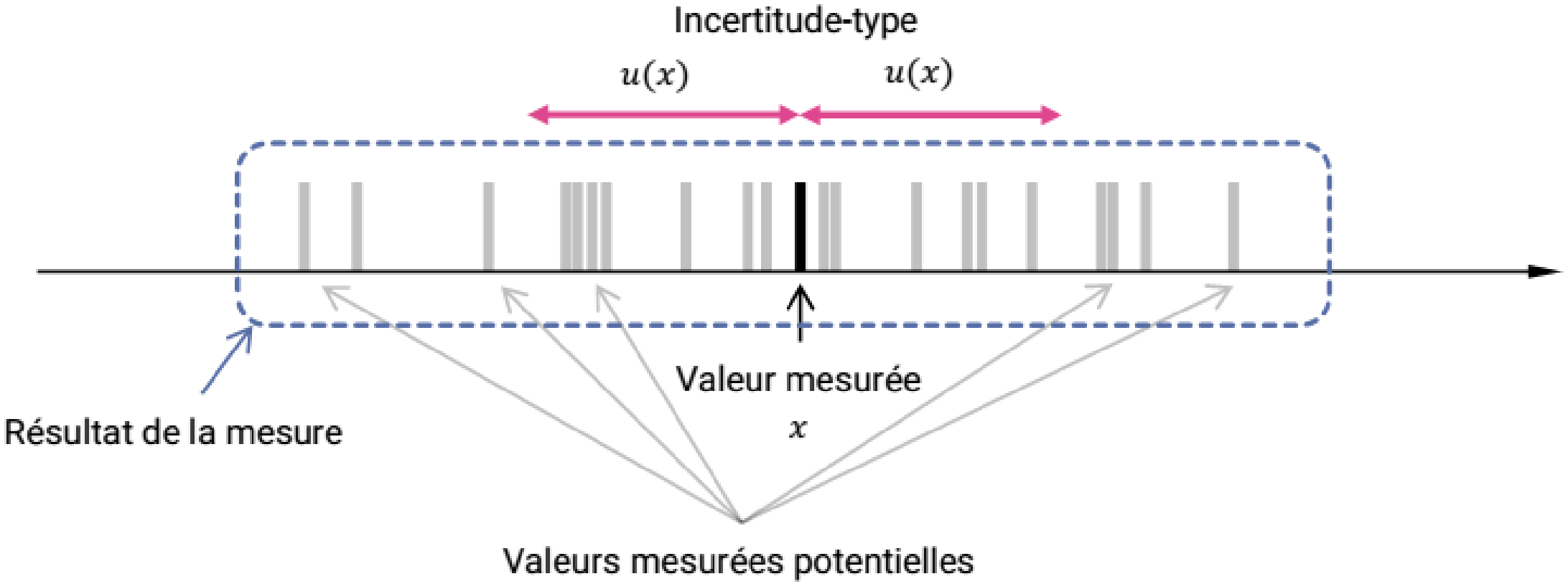
4. 

Problème : sans mention du niveau de confiance (hors programme au lycée), toutes ces notations induisent l'idée d'un intervalle aux « frontières étanches », or il faut que l'élève ait conscience qu' **une valeur en dehors de l'intervalle est possible** !

5. $\bar{x} = \cdots \quad ; \quad u(x) = \cdots$

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

Différentes façons d'écrire un résultat



Source : Mesures et incertitudes au lycée (Eduscol)

Constater et utiliser la **dispersion** des valeurs

Que dire aux élèves ? Qu'attendre d'eux ?

L'écriture « normalisée » :

$V = (24{,}823 \pm 0{,}032)$ mL, (68%)

Elle signifie :

Si la valeur de V suit une loi de distribution gaussienne, la valeur de $\bar{V}$ a une probabilité égale à 68% de se trouver dans l'intervalle [24,791 mL ; 24,855 mL]

Pour les élèves de lycée :

$V = 24{,}82$ mL ; $u(V) = 0{,}04$ mL

déc… sur l… …t …leur



Finalement, que retenir ?

1. Variabilité et incertitude

1.1. Mesure

■ Quelques définitions

On considère une grandeur physique notée x.

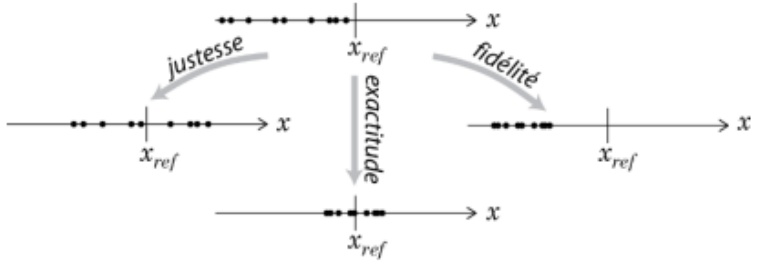
- **Le mesurage** (que nous appellerons « mesure » devant des élèves) est un processus consistant à obtenir expérimentalement une valeur pouvant être attribuée à la grandeur mesurée.
- **Valeur mesurée** : valeur que l'on obtient par mesurage. Elle est notée x_{mes}.
- **Valeur expérimentale** : valeur notée x_{exp} obtenue expérimentalement, par mesurage unique ou multiple, ou par calcul.
- **Valeur de référence** : valeur mesurée à laquelle on accorde plus de confiance, dérivée d'un modèle, issue d'un Handbook, ou constante universelle.

■ Les sources d'incertitude

La qualité de l'instrument de mesure, son maniement par l'expérimentateur, les difficultés de repérage ou la variabilité de la grandeur mesurée sont les principales causes de variabilité d'une mesure.

1.2. Justesse, fidélité, exactitude

Si l'on dispose d'une valeur de référence, on peut caractériser une mesure par les notions de justesse et de fidélité :



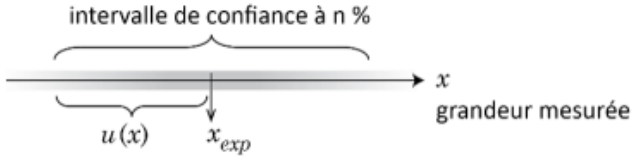
1.3. Incertitude et intervalle de confiance

■ Incertitude de mesure

L'incertitude de mesure est **une estimation** de la variabilité d'une mesure.
Selon la norme AFNOR l'incertitude sur la mesure d'une grandeur x est notée $u(x)$.

■ Incertitude et intervalle de confiance

L'incertitude permet d'estimer **l'intervalle** dans lequel la mesure a des chances de se trouver. Elle est associée à un **niveau de confiance** qui est la probabilité que la mesure soit comprise dans l'intervalle.



Ces deux énoncés sont équivalents :

« L'incertitude sur la mesure de x vaut $u(x)$ avec un niveau de confiance de $N\%$»
« La mesure de x a $N\%$ de chance d'être comprise entre $x_{exp} - u(x)$ et $x_{exp} + u(x)$ »

Une autre manière de l'écrire est : $x = x_{exp} \pm u(x)$

NB : Les notions d'intervalle de confiance, de niveau de confiance ainsi que les écritures qui y font référence ne sont plus préconisées dans les programmes du lycée.

Pour annoncer une mesure et son incertitude, on annoncera donc :

La valeur est x_{exp} ; l'incertitude-type est $u(x)$.

2. Estimation d'une incertitude

2.1. Évaluation par une approche statistique (type A)

On dispose d'un **échantillon de *N* valeurs** mesurées.

■ L'incertitude-type d'**UNE** valeur mesurée est l'écart-type de l'échantillon :

$$u(x_i) = s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

■ Si l'on réalise une série de N' mesures (ne faisant pas forcément partie de l'échantillon qui a servi à calculer s_{exp}) :

→ La meilleure valeur à retenir de cette série est la valeur moyenne des N' mesures, notée $\bar{x}$.

→ L'incertitude-type de **la moyenne** de ces N' mesures est l'écart-type sur la moyenne :

$u(\bar{x}) = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N'}}$ s_{exp} est l'écart-type de la série de valeurs, calculé à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur. Le symbole de cet écart-type diffère selon les modèles de calculatrices :

- « S_x » sur les modèles TI ;
- « $x\sigma n-1$ » sur les modèles Casio ;
- « `Ecart type echantillon` » (pour Numworks).

L'élargissement des incertitudes n'est plus préconisé par les programmes et on ne fera pas mention du niveau de confiance devant les élèves.

Finalement, pour les élèves de seconde…

x

Grandeur mesurée

Résultat d'une mesure

x_{exp}

VALEUR obtenue EXPÉRIMENTALEMENT
dernier CS de même rang que celui de $u(x)$

$u(x)$

INCERTITUDE-TYPE
de la valeur mesurée

Seconde

Série de N mesures indépendantes



mesure n°	volume (mL)
1	22
2	22
3	25
4	26
5	23
6	24
7	23
8	21
moyenne	23,25

$x_{exp} = \bar{x}$

moyenne des valeurs obtenues

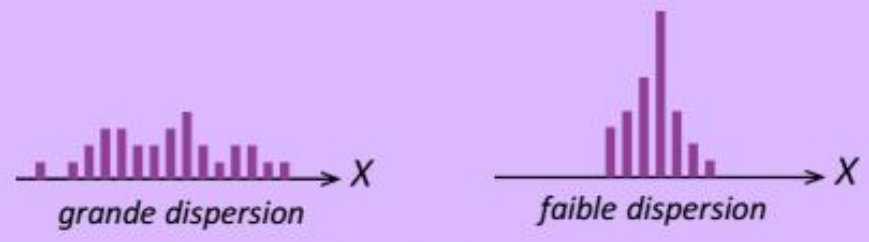
Évaluation par une approche **statistique**

Évaluation de type A

$u(\bar{x})$

Incertitude-type **de la moyenne**

- liée à l'écart-type : estime la dispersion



- diminue si le nombre N de mesures augmente

Sommaire

- Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?
- **En 2nde** : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée
- **En 1ère** : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B
- **En terminale** : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence

Sommaire

- Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?
- **En 2nde** : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée
- **En 1ère : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B**
- **En terminale** : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence

Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B



Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B



Source : Mesures et incertitudes au lycée (Eduscol, à paraitre)

Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B

Que vaut la largeur d'une carte bancaire ?



Chacun :

- se munit de sa CB ;
- se munit d'un double décimètre ;
- mesure la largeur de sa CB ;
- note la valeur qu'il a obtenue.

Question à se poser :

- que vaut l'incertitude de la mesure ?
- et surtout : *cette incertitude diminue-t-elle si l'on répète l'opération un grand nombre de fois ?*

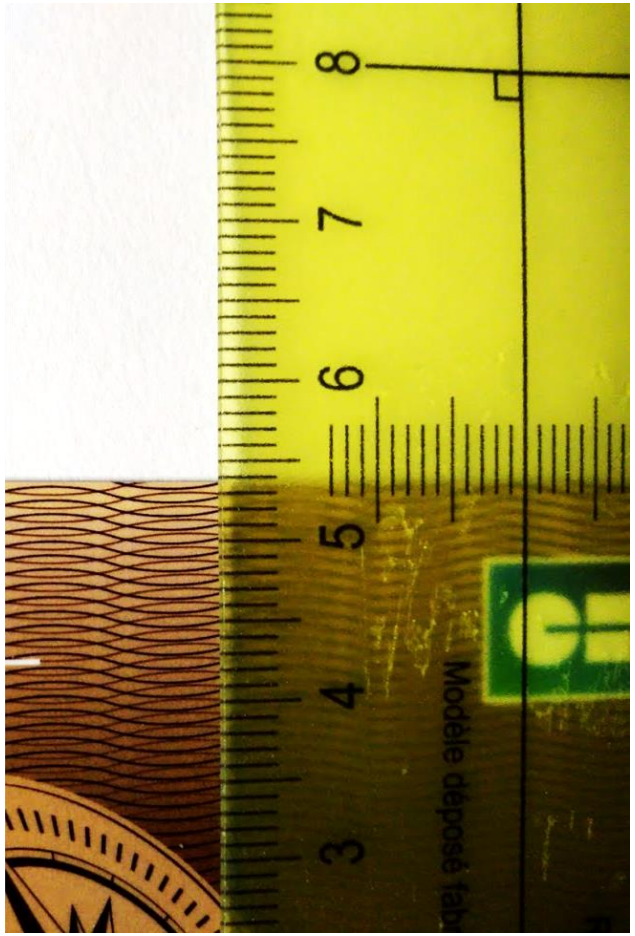
Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B

Que vaut la largeur d'une carte bancaire ?

- On est certain que la valeur mesurée de *L* ne vaut pas 55 mm et qu'on ne trouvera jamais cette valeur, *même si on répète la mesure*.

- On peut affirmer que la valeur de *L* que je lis :
  - est supérieure à 53 mm
  - est inférieure ou égale à 54 mm
  - est plus proche de 54mm que de 53 mm
    ⇒ on retient donc : ***L* = 54 mm**

- On ne peut pas donner le chiffre des dixièmes de mm et **répéter la mesure n'y changera rien**.

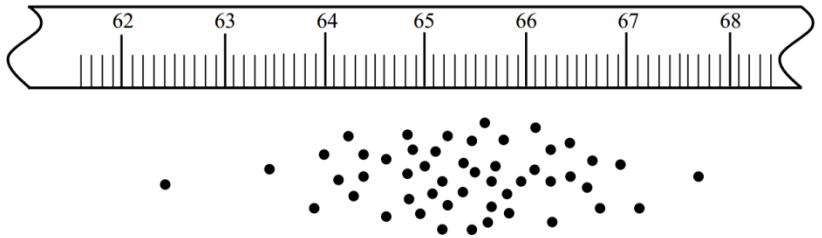


Deux types d'évaluation

Évaluation de **type A** :

Si incertitude évaluable

par une méthode statistique



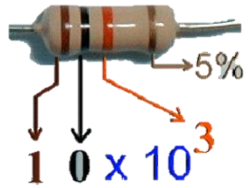
Évaluation de **type B** :

Dans les autres cas

- Caractéristiques de l'instrument
- Estimation par l'expérimentateur (graduations…)







Deux types d'évaluation

LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique** : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.
Incertitude-type.	Définir qualitativement une incertitude-type. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.

La seule nouveauté de première

Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B



Mais dans tous les cas…
les lois de la probabilité…

Estimation de l'incertitude

Par des moyens statistiques (mesures répétées)

Évaluation de type A de l'incertitude-type

Par un modèle probabiliste (quelle probabilité la mesure a-t-elle de…)

Évaluation de type B de l'incertitude-type

Mais on peut faire une **mesure unique** et estimer l'incertitude sur cette mesure à l'aide d'une **évaluation préalable de type A**



Mais dans tous les cas…
les lois de la probabilité…

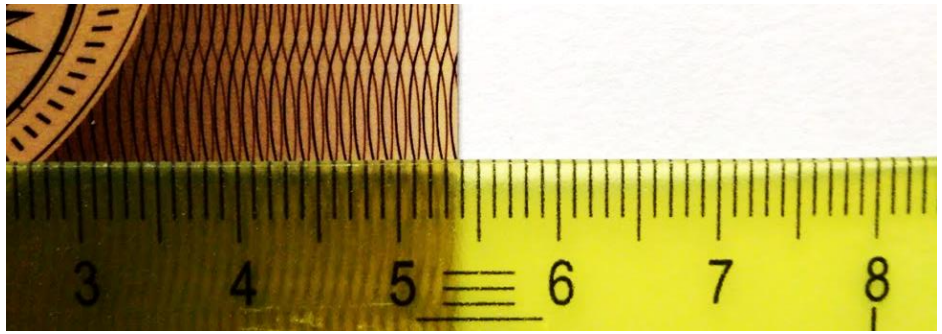
Fonction distribution de probabilité à partir d'une distribution d'effectifs

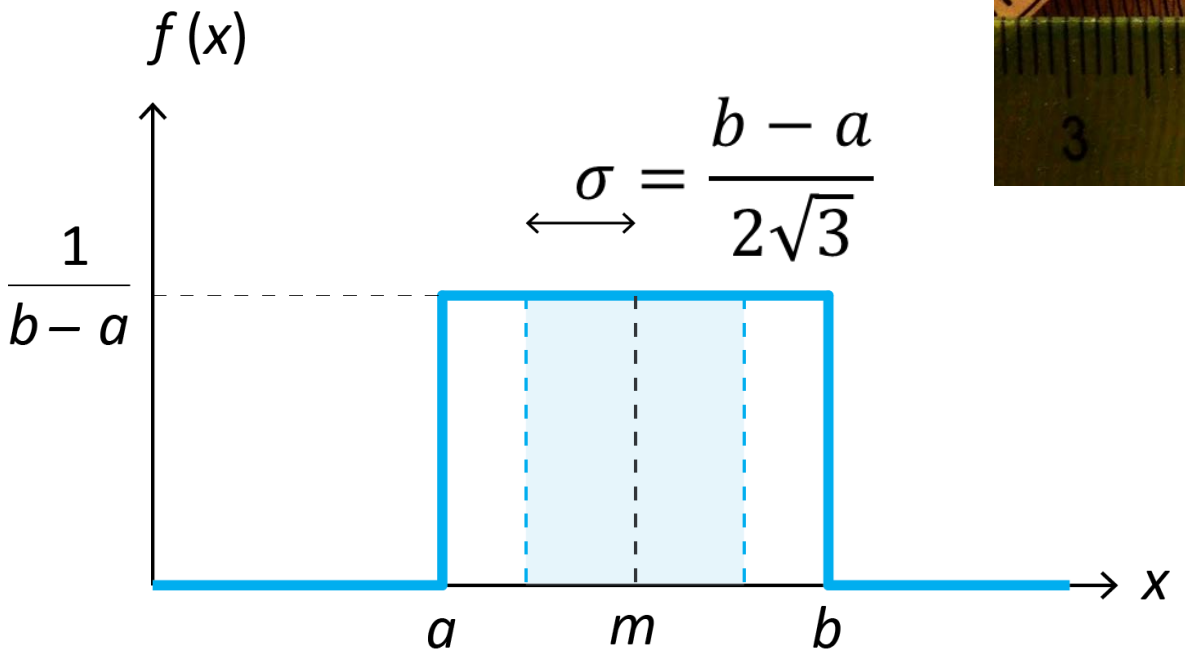
- *observée (type A)*
- *supposée (type B) (on modélise)*

Randomisation : on explique la variabilité des résultats déterministes (pas d'aléatoires) comme s'ils étaient des réalisations d'une variable aléatoire.

L'incertitude-type
correspond
à l'écart-type
de la fonction distribution de probabilité

Petit détour théorique : la distribution uniforme

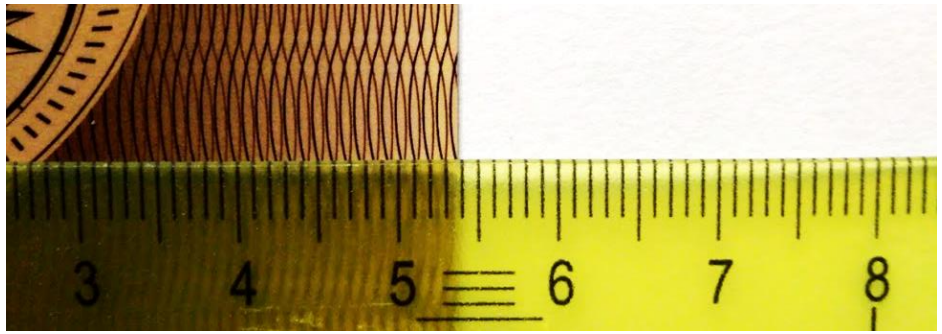


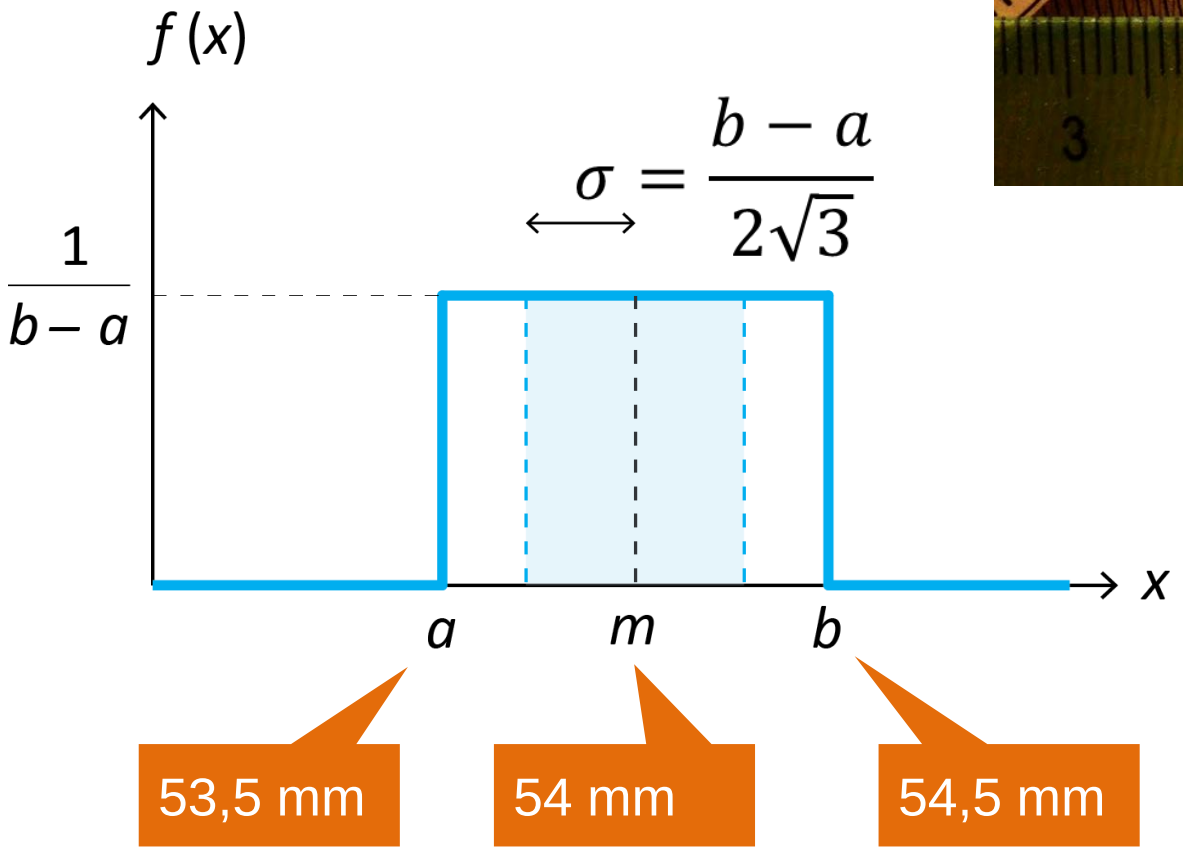


Le résultat de la mesure a :

- ➔ 57% de chance de se trouver dans l'intervalle [m - σ ; m + σ] ;
- ➔ 95% de chance de se trouver dans l'intervalle [m - 1,65 σ ; m + 1,65 σ] ;

Petit détour théorique : la distribution uniforme

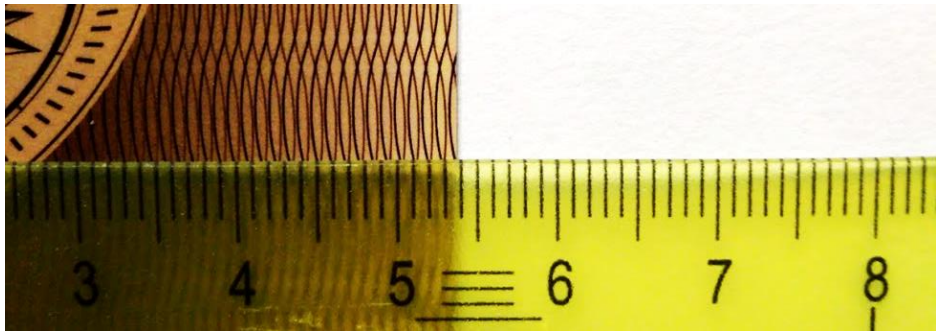


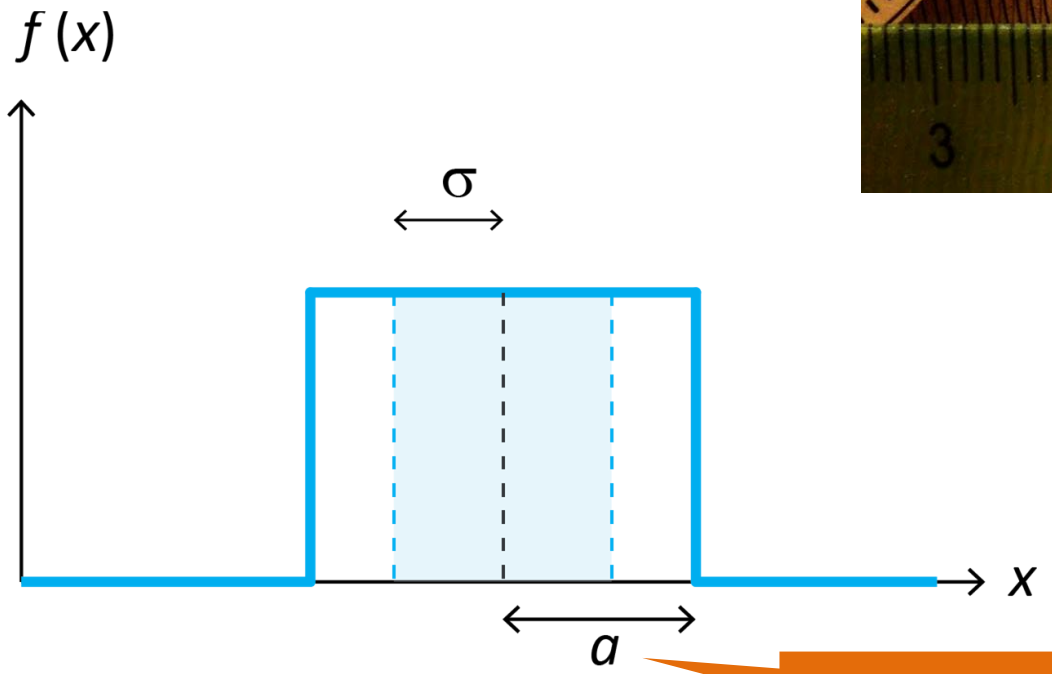


$$u(m) = \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{1\text{mm}}{2\sqrt{3}} \approx 0,29\ \text{mm}$$

un quart de graduation mais niveau de confiance 57%

Petit détour théorique : la distribution uniforme





la **résolution** de l'appareil

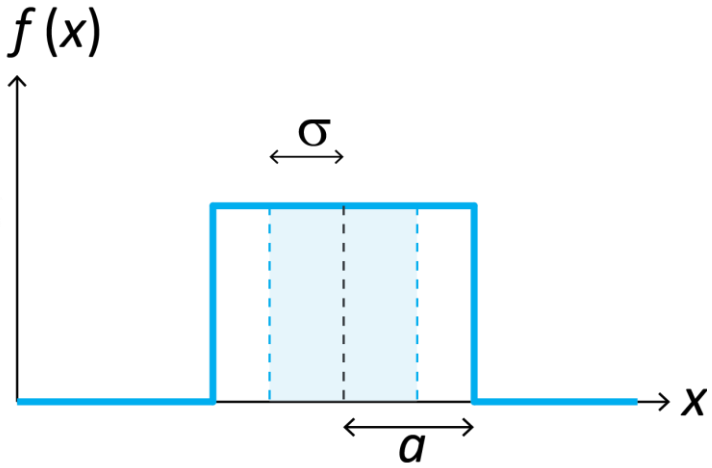
- la résolution n'est pas l'incertitude ;
- avoir considéré que la résolution était une demi-graduation est **un choix** (pas forcément réaliste).

Évaluer une incertitude par une méthode de type B



Situations pouvant être décrites avec une distribution uniforme

- **Instrument gradué** de résolution *a*
- **Appareil numérique**, résolution affichage *a* (souvent notée “précision a” :
  x% de valeur affichée + y dernier digit
- **Indication de *a*** (sans autre info)
- **Instrument dont la “classe”** est indiquée
- Valeur donnée sans incertitude : unité du dernier chiffre = largeur de l’intervalle
- Incertitude de détermination (ressentie opérateur)



$$Incertitude - type :$$

$$u(x) = \sigma = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{12}} = 0{,}58a$$

Cas d'une échelle digitale

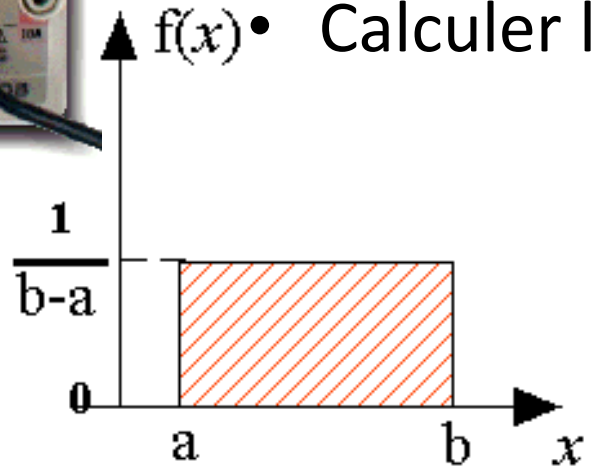
Mesure unique

↪ Erreur liée à l'instrument



$U = 6{,}08$ V

- Si on change la sensibilité du voltmètre pour avoir 4 chiffres significatifs, quelle est la probabilité d'obtenir $U = 6{,}082$ V ?
- Calculer l'incertitude-type



Fonction de densité de probabilité



Cas d'une échelle digitale

Mesure unique

↪ Erreur liée à l'instrument

Plage VC130/150	Précision	Résolution
200 mV	±(0,5% + 8)	0,1 mV
2000 mV		1 mV
20 V		0,01 V
200 V		0,1 V
250 V	±(0,8% + 8)	1 V

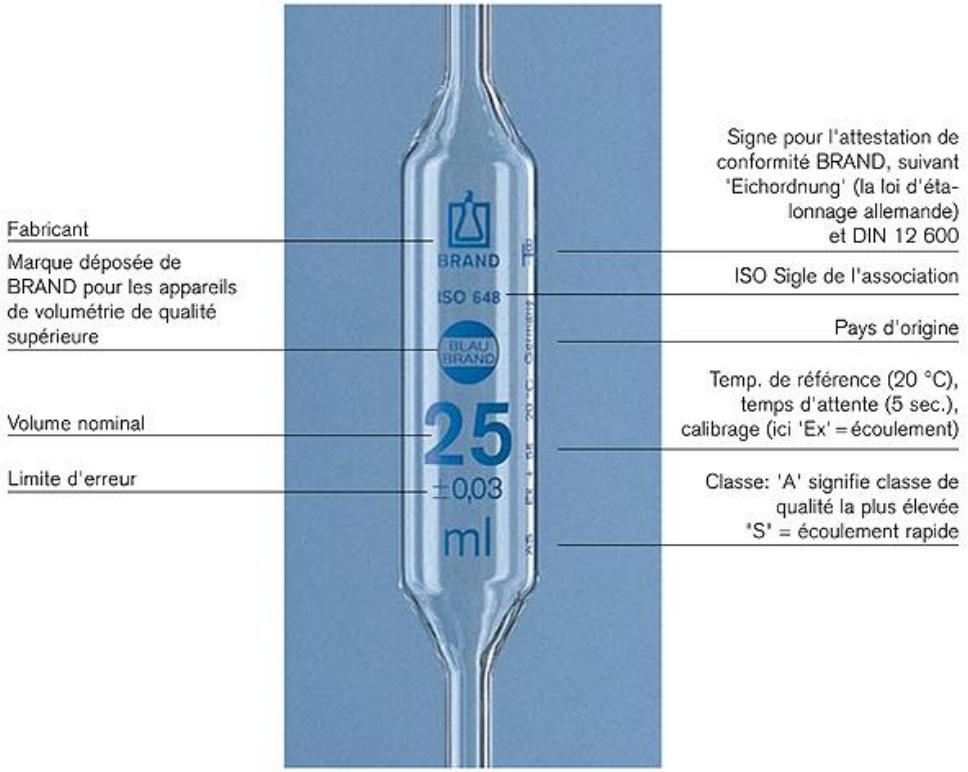
Extrait de la notice du multimètre Voltcraft VC 130.

- Calibre 20 V :
  (0,5%x10,00 V) + (8x0,01 V) = 0,13 V
  C'est la demi-étendue
  incertitude-type : 0,075 V
- Calibre 200 V :

En pratique…

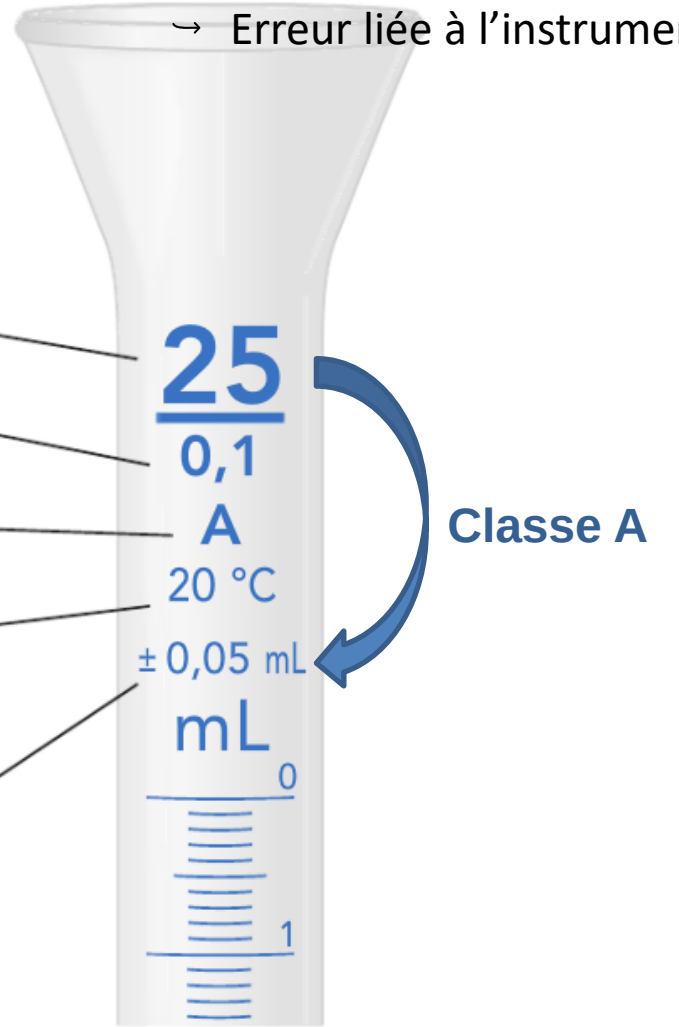
Mesure unique

↪ Erreur liée à l'instrument



Type de verrerie	*Écart maximum toléré (EMT)*
A	0,2 % du volume total
B	0,5 % du volume total

Sur cette burette graduée, le fabricant a indiqué :
– le volume maximal mesurable : 25 mL ;
– la graduation la plus petite : 0,1 mL ;
– la classe de l'instrument : A ;
– la température pour laquelle l'indication du volume est la plus précise : 20 °C ;
– la tolérance : ±0,05 mL.



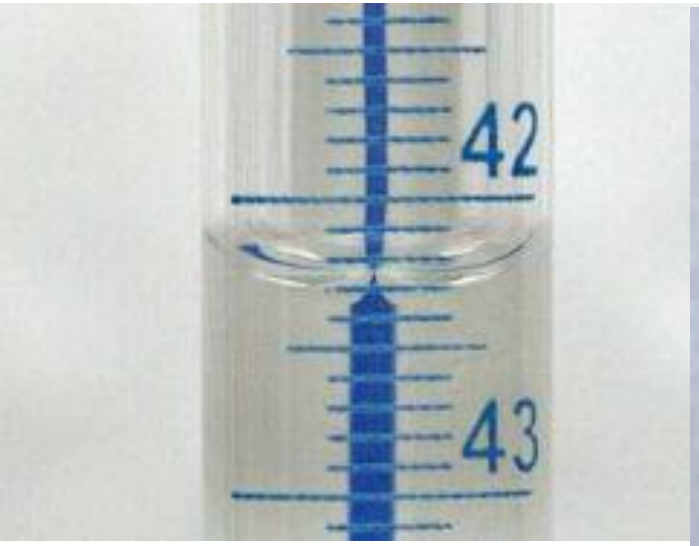
(Hachette TS)

Évaluer une incertitude par une méthode de type B

Mesure unique

En pratique…

↪ Erreur liée à l'instrument





- Détermination à la goutte près : 0,04 mL
- Burette 25 mL de classe A (±0,02 mL)

Évaluer une incertitude par une méthode de type B

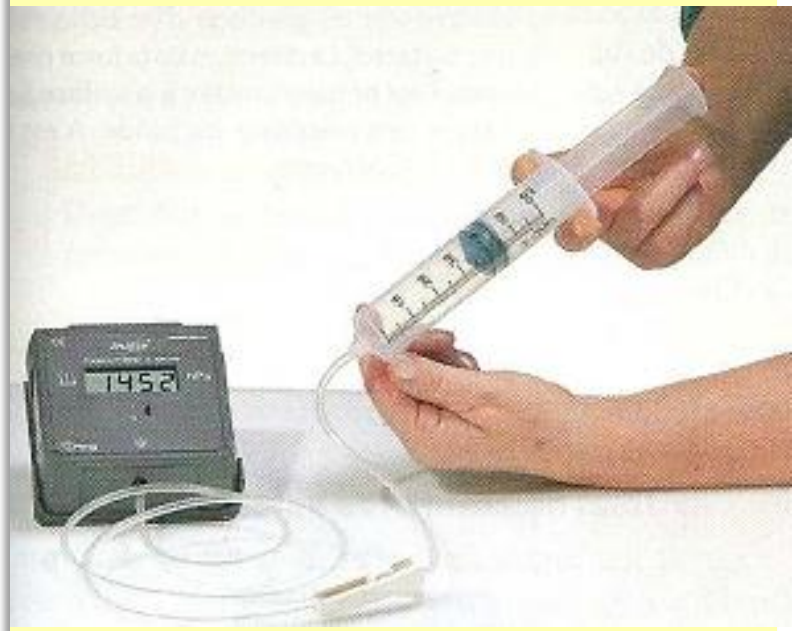
Mesure unique

↪ Erreur liée à l'instrument

En pratique : mesure directe d'une grandeur à l'aide d'un instrument à affichage digital…

EXEMPLE

Loi de Boyle-Mariotte



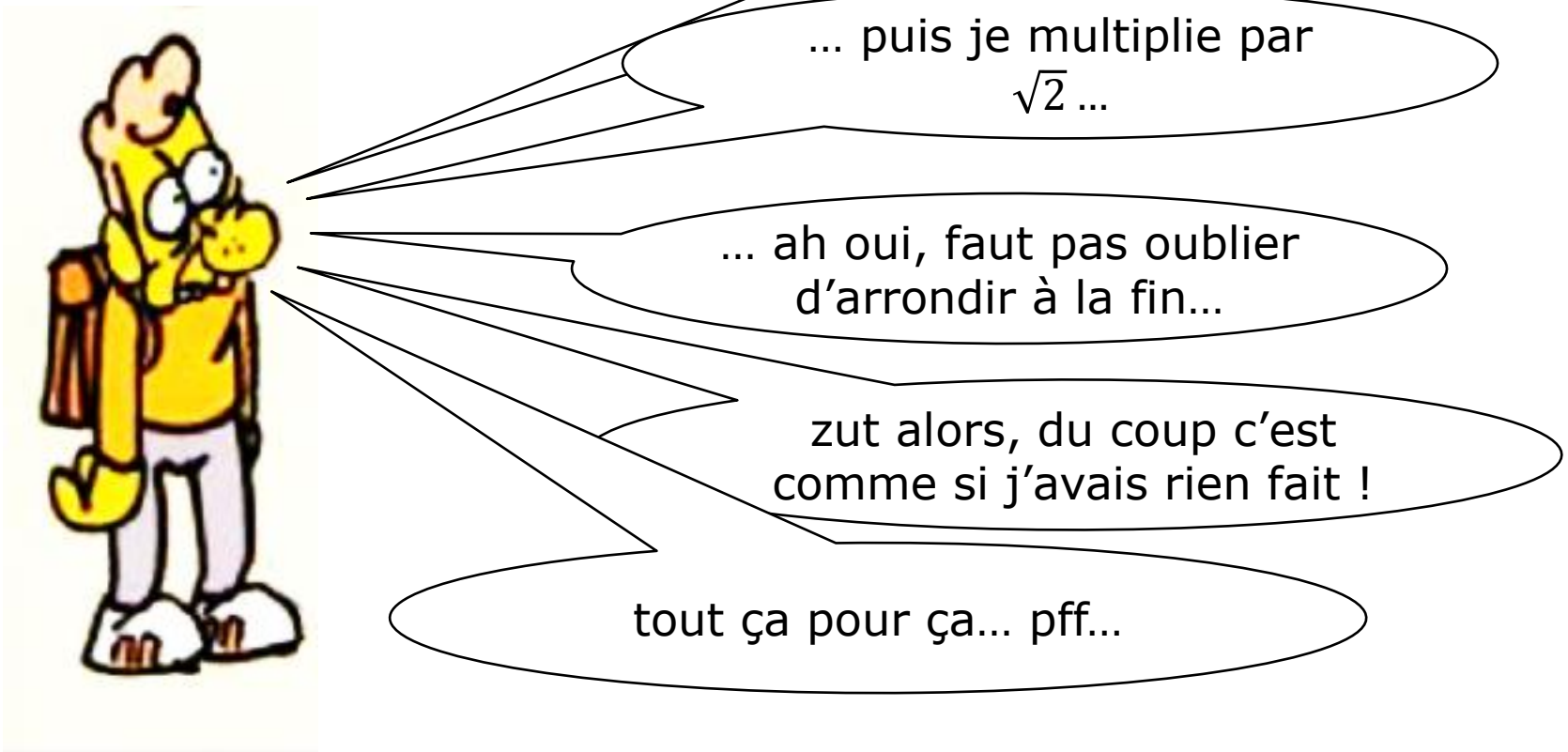
Caractéristiques techniques

- Gamme : 0 à 2000 hPa
- Précision : 2% +/- 4 hPa
- Résolution : 1 hPa
- Pression maximale : 4000 hPa
- Dimensions : 100 x 100 x 40 mm
- Alimentation : 1 pile 9 V type 6F22

$P = 1452\ \text{hPa}$

Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B

… et que dire aux élèves ?



Évaluer une incertitude par une méthode de type B

Que dire aux élèves ? Qu'attendre d'eux ?

Programme de 1re :

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique** : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.
Incertitude-type.	Définir qualitativement une incertitude-type. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.

Définir l'incertitude – type comme critère caractérisant **l'erreur de mesure**

- calculée avec une série

ou

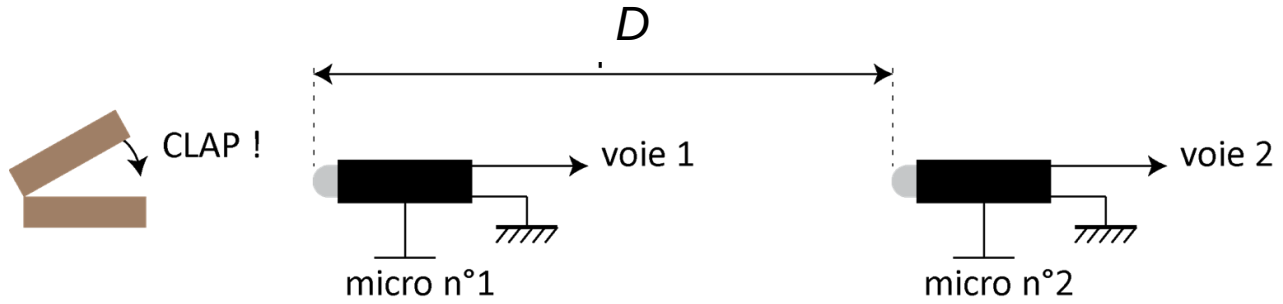
- donnée

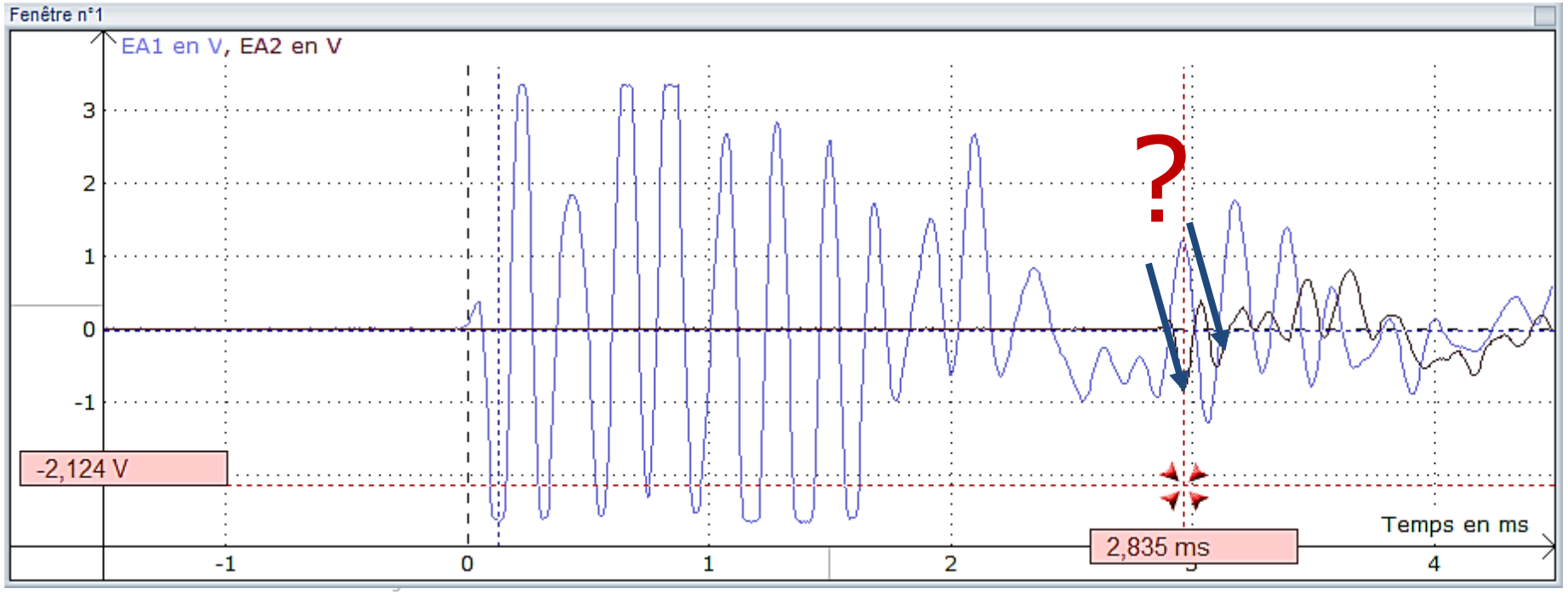
Repérer si on utilise une **approche statistique ou non**.

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Quand l'instrument de mesure ne fait pas tout…

Un exemple classique : la mesure d'une durée de propagation du son





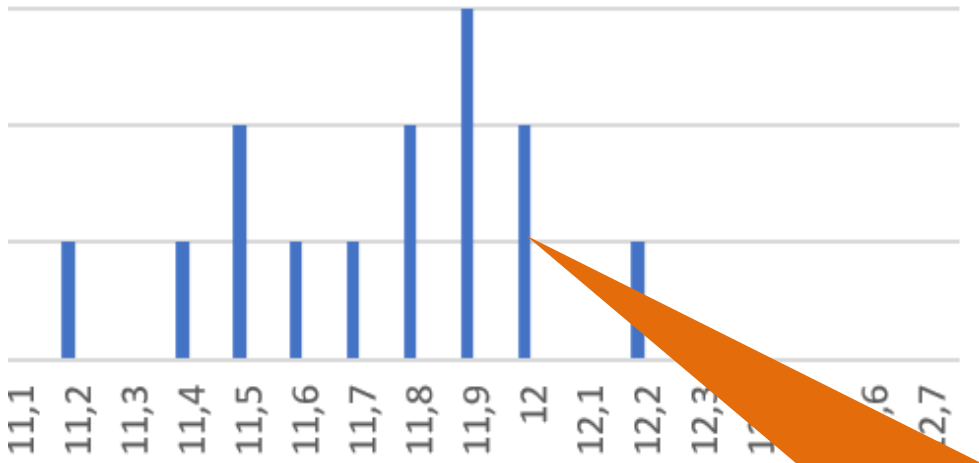
Évaluer une incertitude par une méthode de type B

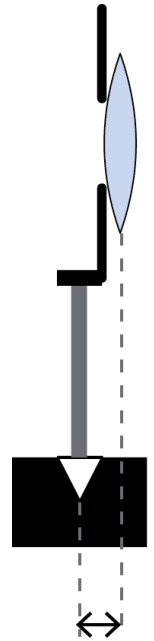
Mesure unique

Quand l'instrument de mesure ne fait pas tout…
Le cas d'école : l'optique

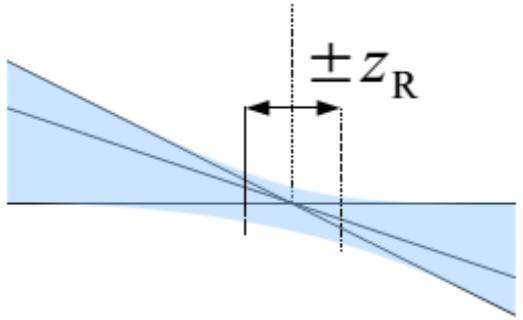
Pourtant…

Mesures d'une distance focale dans une classe de 1ère STL





erreur systématique



Il faut avant tout tenir compte de :

- L'erreur systématique (les accessoire ne sont pas exacter
  au-dessus des curseurs du banc d'optique) ;
- et surtout : **l'erreur de repérage !**

Graduation en mm, certains modèles affichent même des demi-millimètres

Évaluer une incertitude par une méthode de type B



Mesure unique

↪ Erreur liée au repérage

Quand l'instrument de mesure ne fait pas tout…
Le cas d'école : l'optique
… alors que dire aux élèves ?

aucune « formule » !

- soit on leur donne la valeur de *u*
- soit on les amène à se questionner : « de combien je peux me tromper en mesurant de cette manière ? »
- dans quel intervalle il est raisonnable de considérer la mesure ?

réponse ici : $u(f') \approx 2\ \mathrm{cm}$?

Évaluer une incertitude par une méthode de type B

Mesure unique

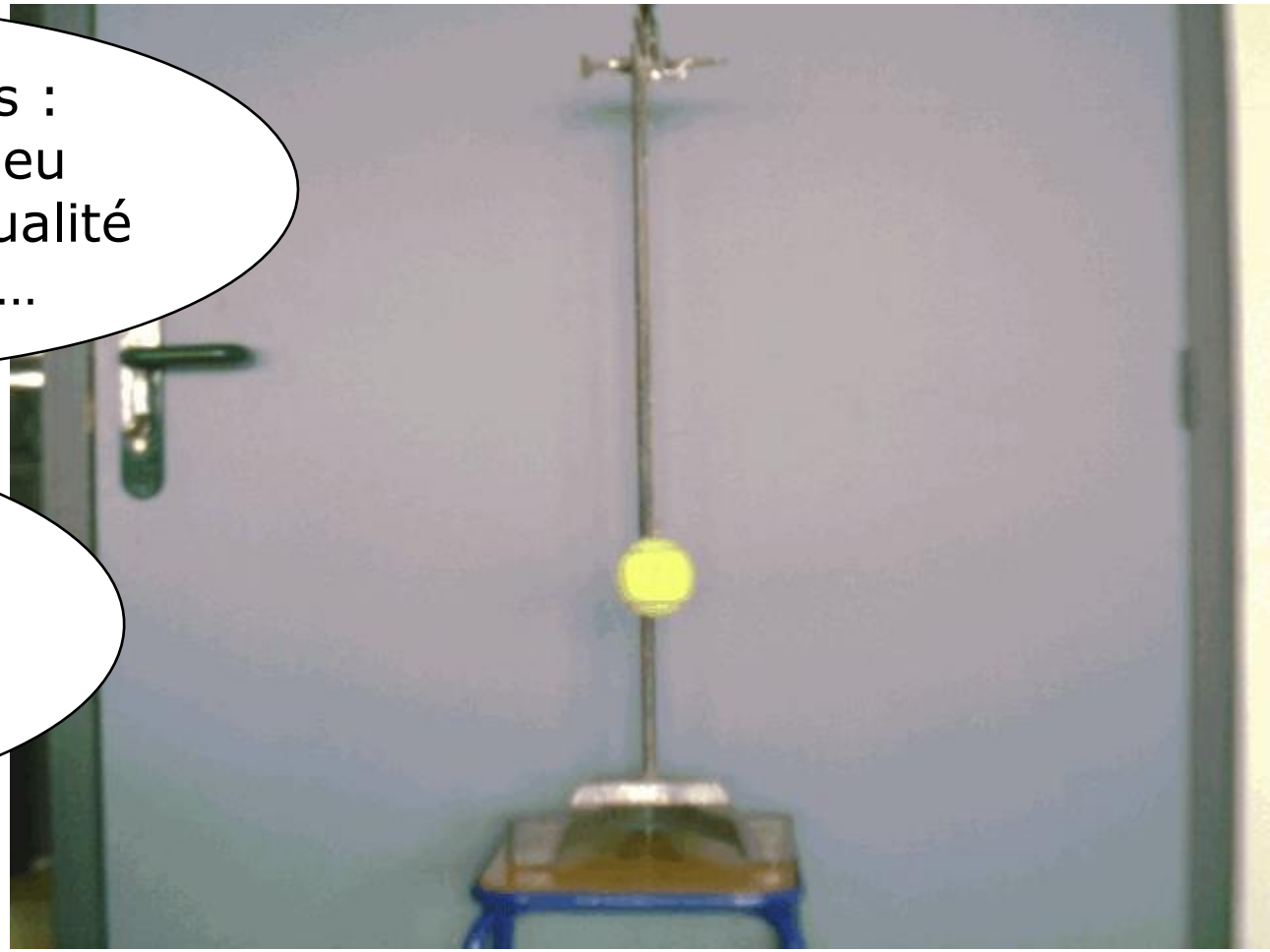
↪ Erreur liée au repérage

Encore un cas d'école… la mesure de la période d'un pendule



Ca va j'ai compris : l'incertitude est peu dépendante de la qualité du chronomètre…

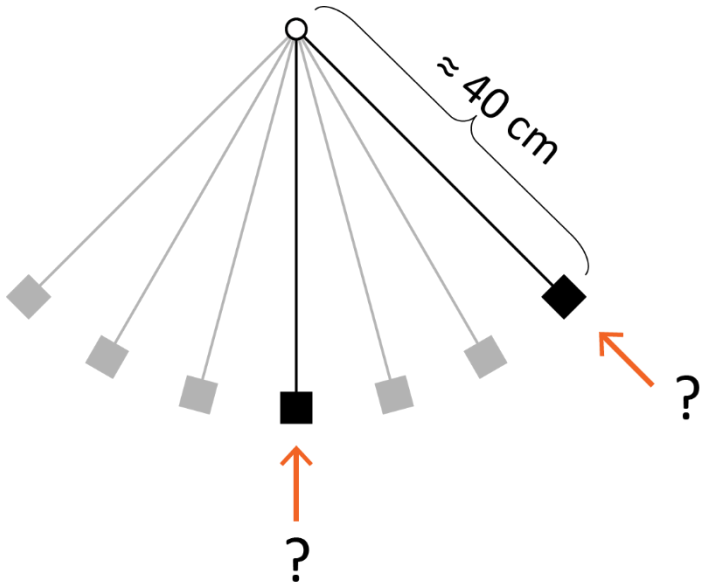
Alors on fait comment pour mesurer UNE période le mieux possible ?



Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B

Encore un cas d'école… la mesure de la période d'un pendule

Comment minimiser l'incertitude liée au repérage ?



Chaque binôme :

- réalise un pendule de longueur ≈ 40 cm ;
- effectue 10 mesures de sa période en chronométrant chaque fois 10 allers-retours ;
- calcule l'écart-type sur les valeurs de périodes obtenues.

Attention, deux repères différents pour déclencher le chronomètre :

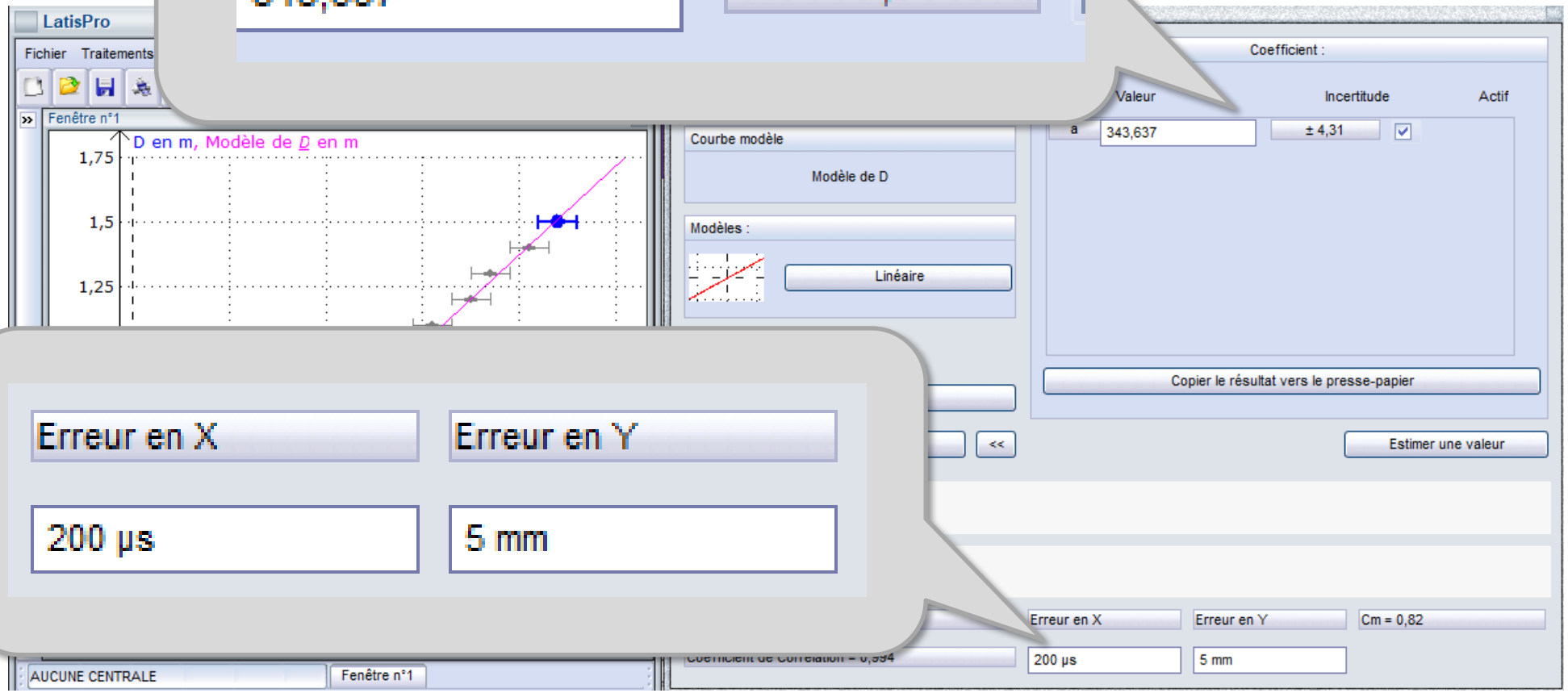
- celles et ceux qui sont sur les paillasses côté fenêtre utilisent le passage du pendule **à une extrémité de sa trajectoire** ;
- celles et ceux qui sont sur les paillasses côté couloir utilisent le passage du pendule **à la verticale**.
- À la fin on verra quel groupe obtient l'écart-type le plus faible…

Vous pouvez utiliser votre calculatrice ou le script Python fourni pour calculer l'écart-type de vos valeurs

`Script « ecart_type_periode »`

Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B

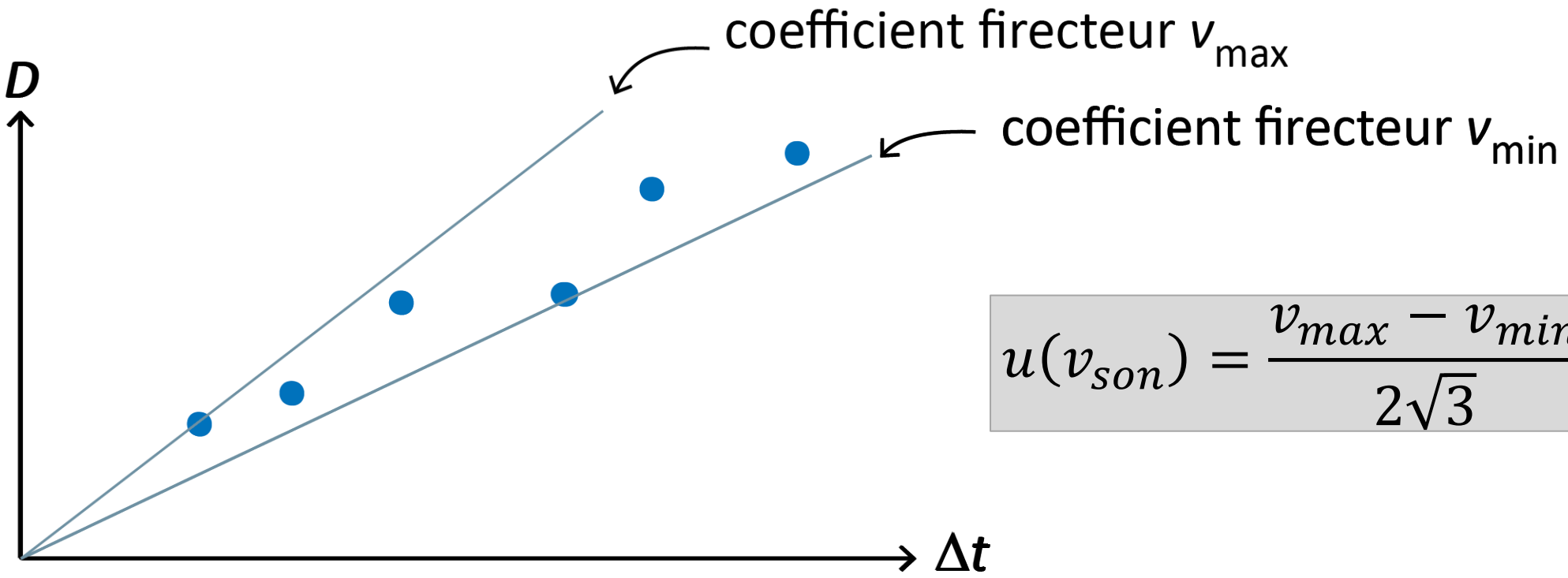
Un derr
Comm andeur recherchée
est **le c**



Évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B

Un dernier cas fréquent :
Comment estimer l'incertitude lorsque la grandeur recherchée est **le coefficient directeur** d'une droite ?

Mais si on veut éviter l'aspect « boîte noire », un moyen plus simple (moins « propre » mais bon…) :



$$u(v_{son}) = \frac{v_{max} - v_{min}}{2\sqrt{3}}$$



… et que dire aux élèves ?

- Les élèves n'ont à connaître aucune des relations qui expriment les incertitudes – types. C'est au professeur de les leur donner.

- L'objectif est davantage de permettre aux élève d'interpréter la valeur de l'incertitude (lui donner du sens) que de l'évaluer précisément : il s'agit de pouvoir comparer différentes étendues de valeurs…

- Au lycée, on peut s'autoriser quelques entorses à l'orthodoxie de la métrologie, par exemple « l'incertitude, c'est une demi-graduation ».

Finalement que retenir ?

2.2. Évaluation par une approche autre que statistique (type B)

L'incertitude d'une mesure effectuée une seule fois conjugue deux sources d'informations :

- des informations techniques sur l'instrument de mesure données par le fabriquant ;
- des informations subjectives sur l'appréciation de la façon dont la mesure a été effectuée.

■ Valeur issue d'une mesure (ou lecture) sans indication supplémentaire

L'utilisation du dernier chiffre est une façon simplifiée de prendre en compte l'incertitude sur une grandeur mesurée donnée sans intervalle et en l'absence d'autre indication : on peut considérer que l'incertitude est égale à la demi-unité du dernier chiffre exprimé.

■ Mesure unique avec un instrument de mesure gradué

L'incertitude est liée à la lecture. Sans davantage d'indications, on considère que l'incertitude est égale à la demi-graduation ou au demi-écart.

Dans le cas d'une distribution rectangulaire l'incertitude-type vaut :

$$u = \frac{\text{demi} - \text{graduation}}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \times \text{demi} - \text{graduation}$$

Pour un instrument vérifié de classe α (généralement analogique), le constructeur indique l'écart maximum toléré (EMT) en pourcentage de la mesure. Avec une distribution rectangulaire l'incertitude-type vaut :

$$u = \frac{EMT}{\sqrt{3}}$$

Dans le cas d'une double lecture sur un instrument gradué, l'incertitude est multipliée par $\sqrt{2}$.

■ Mesure unique avec un instrument à affichage digital

Le constructeur indique pour la précision un pourcentage p de la valeur lue et un nombre N de digit (un digit correspond au dernier chiffre affiché). Il faut chercher cette indication dans la notice de l'appareil. On a alors :

$$u(x_{mes}) = \frac{p \times \text{valeur lue} + N \text{ digit}}{\sqrt{3}}$$
$$\approx p \times \text{valeur lue} + N \text{ digit}$$

Finalement pour les élèves de première…



Seconde

Première

Série de N mesures indépendantes



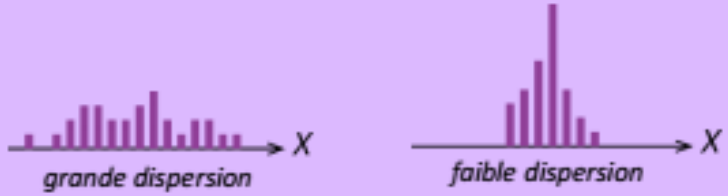
$x_{exp} = \bar{x}$

moyenne des valeurs obtenues

Évaluation par une approche **statistique**

Évaluation de type A $u(\bar{x})$ — Incertitude-type **de la moyenne**

- liée à l'écart-type : estime la dispersion



- diminue si le nombre N de mesures augmente

Mesure unique



$x_{exp} = x_{mes}$

valeur **donnée par l'instrument** de mesure

Évaluation par une approche **non statistique**

Évaluation de type B $u(x_{mes})$ — Incertitude-type **de la valeur mesurée**

- estimation fournie, résultant éventuellement de plusieurs sources d'erreurs :
  - erreur liée à l'instrument utilisé ;
  - erreur liée au protocole de mesure (en particulier erreur de repérage) ;
  - …

Sommaire

- Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?
- **En 2nde** : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée
- **En 1ère** : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B
- **En terminale** : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence

Sommaire

- Pourquoi évaluer les incertitudes ? Et pourquoi de cette façon ?
- **En 2nde** : constater et étudier la dispersion des valeurs lors d'une mesure répétée
- **En 1ère** : évaluer une incertitude par une méthode de type A ou B
- **En terminale : évaluer l'incertitude-type d'une valeur calculée à partir de valeurs mesurées et comparer une valeur mesurée à une valeur de référence**

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Composition et comparaison

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique** : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur ou d'un langage de programmation.
Incertitude-type.	Définir qualitativement une incertitude-type. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
Incertitudes-types composées.	Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs dont les incertitudes-types associées sont connues. **Capacité numérique** : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées.
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer, le cas échéant, le résultat d'une mesure m_{mes} à une valeur de référence m_{ref} en utilisant le quotient $\frac{\lvert m_{mes}-m_{ref}\rvert}{u(m)}$ où $u(m)$ est l'incertitude-type associée au résultat.

Les nouveautés de terminale

Composer les incertitudes

Une première expérience :
réalisons une mesure du record du monde du 200m

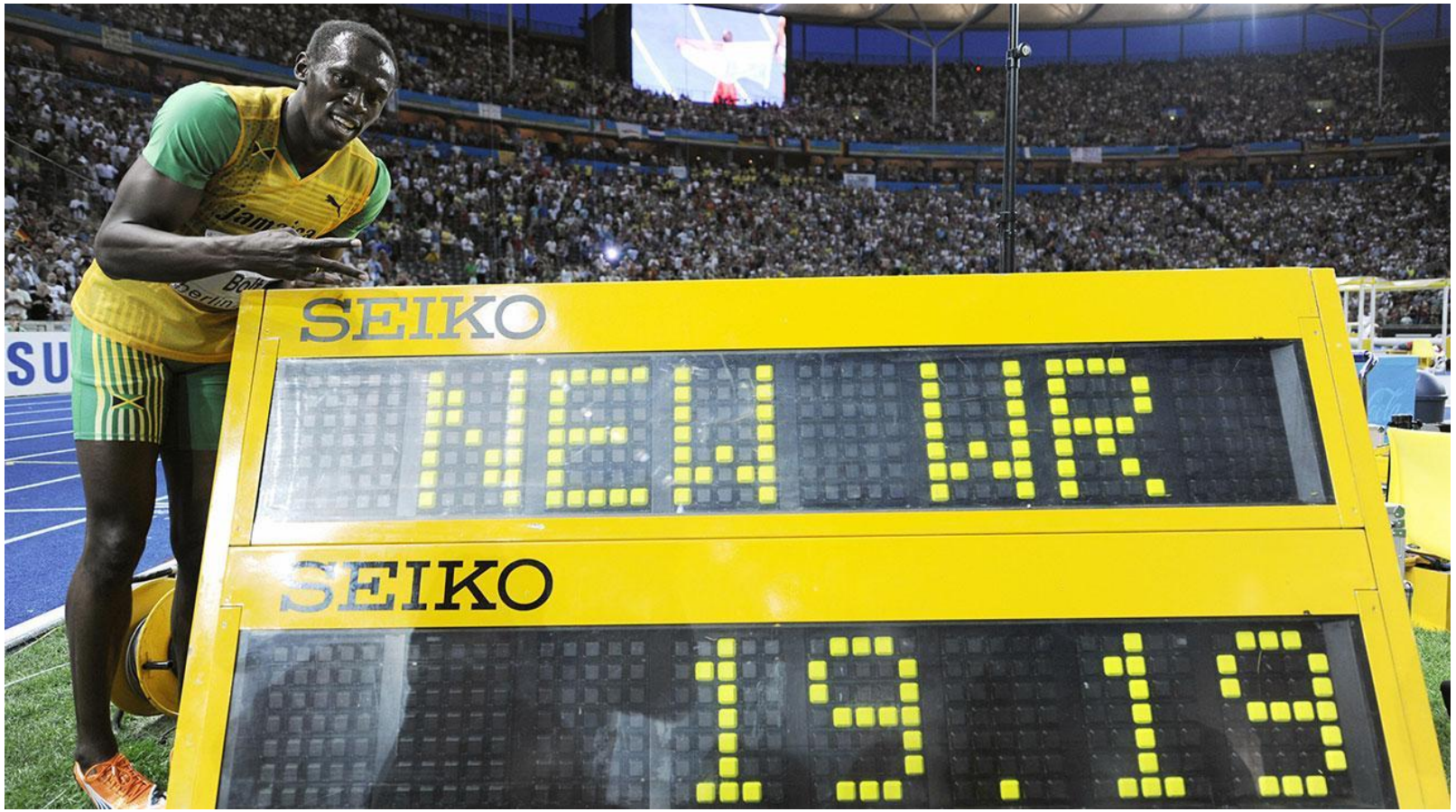




Pour préparer la suite
→ Y a-t-il une valeur de référence ?

Composer les incertitudes

Une première expérience : quelles sources d'erreurs ?



Lister les sources d'erreurs :

✓

✓

✓



Plusieurs sources d'erreurs sur **une** mesure

Pourquoi trouvons-nous tous une durée différente et différente de celle affichée par France 3 ?

Les sources d'erreur :

- l'instrument utilisé
- la simultanéité du start et du son perçu ?
- le temps de réaction au départ
- le temps de réaction à l'arrivée

Certainement la source d'erreur la plus faible.

Non documentée

Certainement la source d'erreur la plus importante… qui évolue si on s'entraine !

Plus faible que la précédente car on peut anticiper le franchissement de la ligne d'arrivée



Plusieurs sources d'erreurs sur **une** mesure

Chaque source d'incertitude est quantifiée par une valeur d'incertitude.

On compose les incertitudes.

Deux possibilités :

- Une incertitude dépasse largement les autres : on ne conserve qu'elle.

- Plusieurs incertitudes $u_i(x)$ ont des valeurs voisines.

  On somme les différentes contributions :

$$u(x) = \sqrt{\sum_i (u_i(x))^2}$$

Plusieurs sources d'incertitudes sur **une** mesure

Revenons à Usain Bolt…

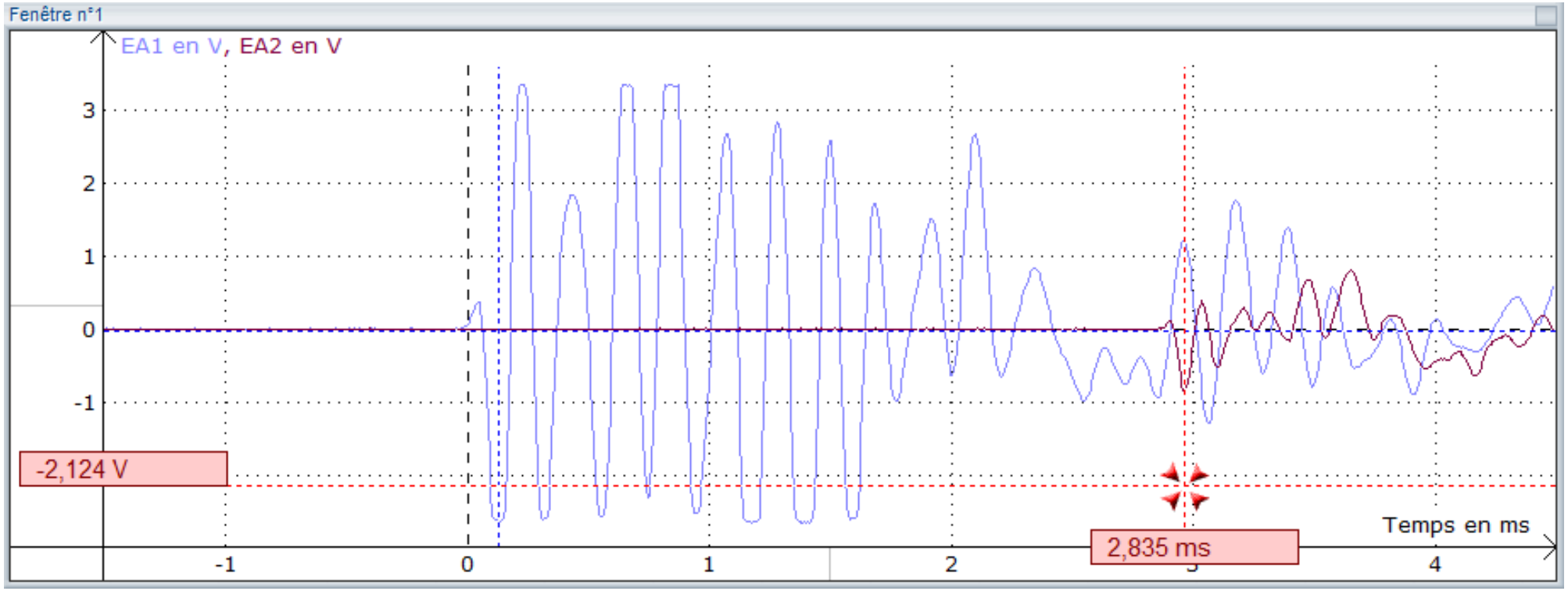


$$u(\Delta t) = \sqrt{u_{\text{départ}}^2 + u_{\text{arrivée}}^2 + u_{\text{chrono}}^2}$$

$$= \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}1^2 + 0{,}00002^2} = 0{,}509\ \text{s}$$

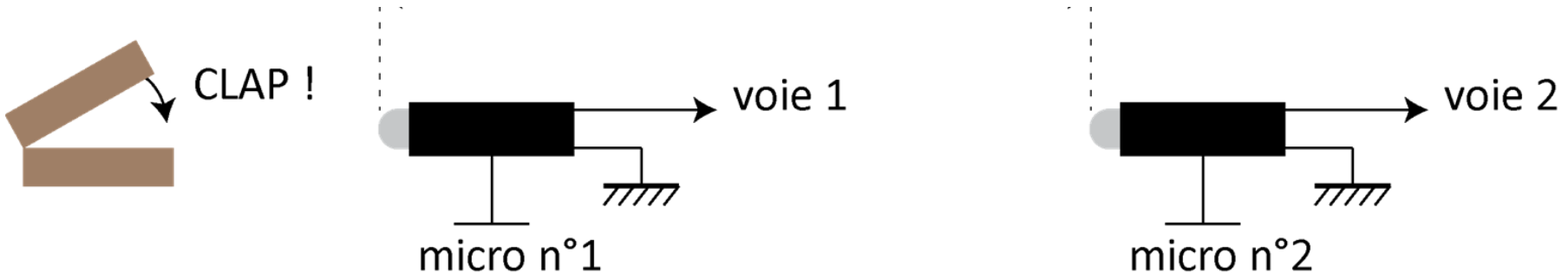
Retour sur la mesure de la célérité des ondes sonores

Mesure de Δt :



$$u(\Delta t) = \sqrt{u_{instrument}^2 + u_{lecture}^2} \approx u_{lecture} = \mathbf{0,2\ ms}$$

Plusieurs valeurs mesurées dont on déduit une **valeur calculée**



On ne mesure pas la vitesse du son : on mesure une distance, une durée, puis on calcule *v*.

$$v = \frac{D}{\Delta t}$$

Comment estimer *u*(*v*) ?



Petit détour théorique : la **propagation** des incertitudes

Si $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \dots, x_n$ indépendantes, alors on admet
généralement :

$$u_c(y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u(x_i)^2$$

$u(x_i)$: incertitude – type de x_i et $u_c(y)$: incertitude – type composée de y



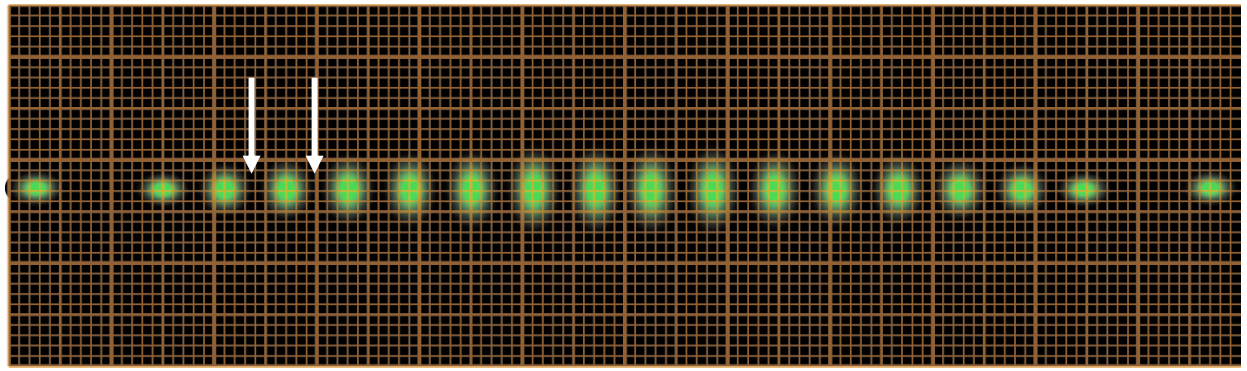
Petit détour théorique : la propagation des incertitudes

Cas fréquents :

$y = a + b - c + \cdots$	$u(y) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2 + u(c)^2 + \cdots}$
$Y = \frac{ab}{c}$	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c}\right)^2 + \cdots}$
$Y = Na$	$u(y) = \lvert N \rvert \, u(a)$
$Y = a^N$	$\frac{u(y)}{y} = \lvert N \rvert \frac{u(a)}{a}$
$Y = ka^N b^M$	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{N^2\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + M^2\left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$
$Y = Na + Mb$	$u(y) = \sqrt{N^2 u(a)^2 + M^2 u(b)^2}$

Conséquence : mesure double

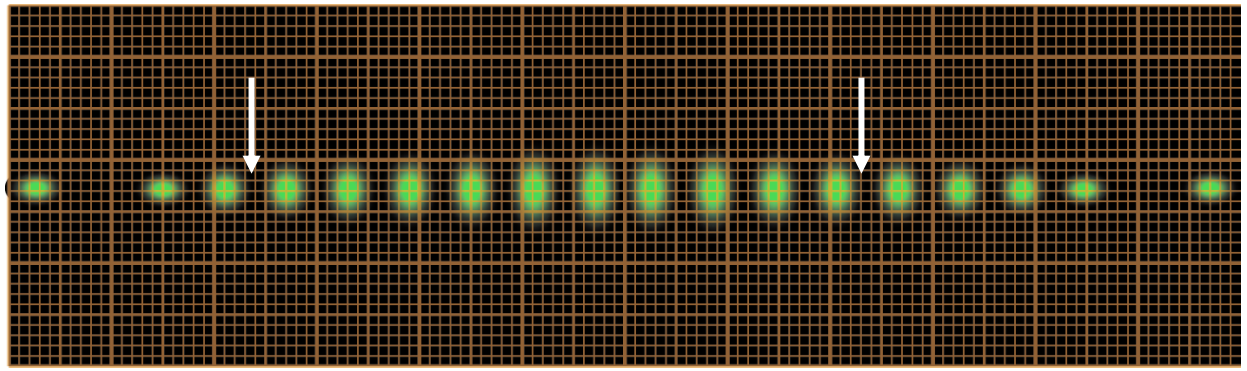
Si *a* est la demi-graduation et que la mesure nécessite une double lecture :



interfrange : $i = x_2 - x_1$

$$u(i) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$$
$$= \sqrt{2u(x)^2}$$
$$= u(x)\sqrt{2}$$

Mesure double : revenons à la mesure d'un interfrange



interfrange : $i = \dfrac{x_2 - x_1}{10}$

$$u(i) = \frac{1}{10} u(x)\sqrt{2}$$

On gagne un facteur 10 sur l'incertitude.

Conséquence : mesure double

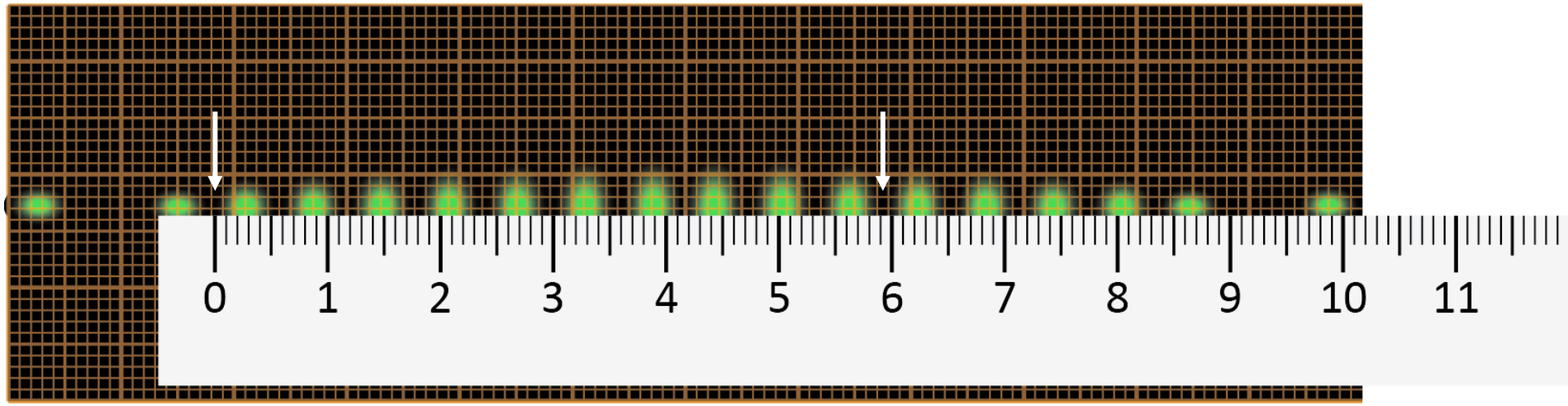
Ouvrons une parenthèse :
La mesure de la largeur de la carte bancaire était-elle une “mesure double” ?



On a supposé que $u(x_0)$ était négligeable devant $u(x_1)$ (discutable) et donc que :

$$u(L) = u(x_1)$$

Mesure double : revenons encore à la mesure d'un interfrange



On gagne (presque) un facteur $\sqrt{2}$ sur l'incertitude.



Autres exemples

$$f = \frac{1}{T} \qquad u(f) = \frac{u(T)}{T^2}$$

$$d = 20\lambda \qquad u(\lambda) = \frac{u(d)}{20}$$

$$c = \lambda f \qquad \frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(f)}{f}\right)^2}$$

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \qquad \frac{u(M)}{M} = \sqrt{9\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + 4\left(\frac{u(T)}{T}\right)^2}$$

Un cas particulier de composition : la propagation des incertitudes



Avec les élèves…

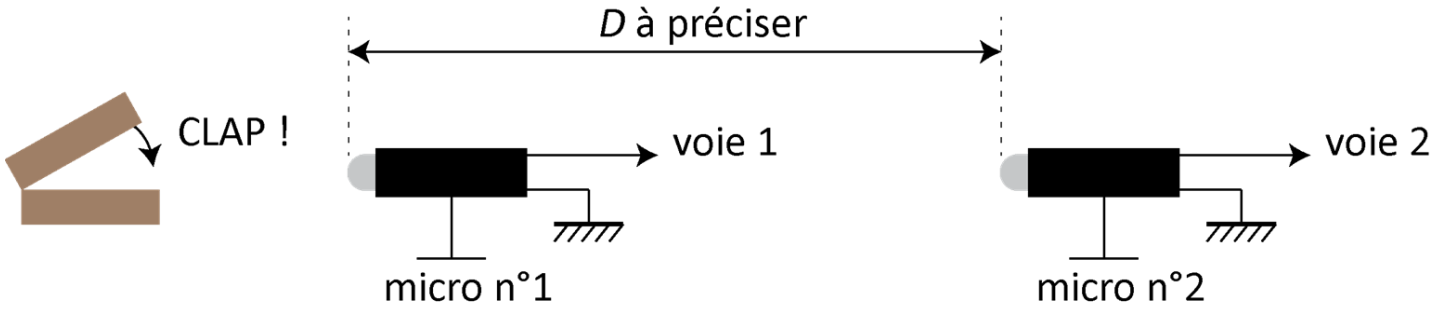
- On donne toutes les relations utiles.
- On automatise les calculs quand c'est possible (tableur, GUM_MC, programmation…).

L'intérêt est :

- d'avoir un regard critique sur les instruments choisis ;
- de comprendre pourquoi le maniement de certains instruments est à ce point contraint (exemple : la pipette jaugée)
- d'avoir un regard critique sur un protocole ;
- d'être en capacité de proposer des améliorations.



Retour sur la mesure de la célérité des ondes sonores



Mesure de D :

$D = 1{,}000\ \text{m}$ $\qquad$ $u(D) = 5\ \text{mm} = 0{,}005\ \text{m}$

très au-dessus de la résolution du mètre ruban :
il faut tenir compte de la difficulté du repérage

Un cas particulier de composition : la propagation des incertitudes



Retour sur la mesure de la célérité des ondes sonores

Calcul de v :

$$v = \frac{D}{\Delta t} = 353{,}73\ldots\ \dot{\text{m}} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$u(v) = v\sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2}$$

$$= 357{,}73 \times \sqrt{\left(\frac{5}{1000}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{2{,}835}\right)^2}$$

$$= \mathbf{25\ m \cdot s^{-1}}$$

Ce terme est complètement négligeable (pas intuitif au départ pour les élèves)

$$v = 353\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \qquad u(v) = 25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

1ère méthode

Cas de la détermination de g et de son incertitude-type

Mesure de ℓ : ℓ =. . . . . ; u(ℓ) = ...

Mesure de T : T =. . . . . ; u(T) = ...

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2} \qquad \frac{u(g)}{g} =$$

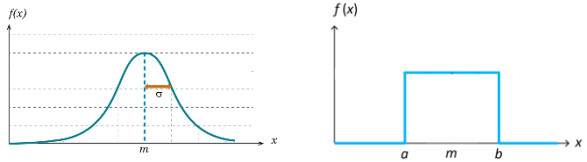
Finalement g =. . . . . ; u(g) = ...

Propager les incertitudes *par une méthode numérique*

Cas de la détermination de g et de son incertitude-type

2e méthode

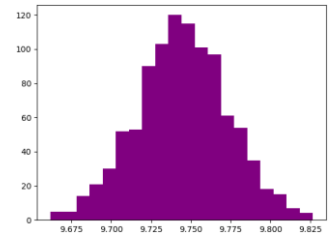
Mesure de ℓ : ℓ =. . . . . ; u(ℓ) = ... → N valeurs choisies



Mesure de T : T =. . . . . ; u(T) = ... → N valeurs choisies

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}$$

N valeurs calculées



u(g) = écart-type

Finalement
g = moyenne ; u(g) = écart-type

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Capacité numérique : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées.

```python
import numpy as np
lvar=np.random.uniform(0.190,0.199,1000)
Tvar=np.random.uniform(0.88,0.90,1000)
gvar=4*3.1416**2*lvar/Tvar**2
gmoy=np.mean(gvar)
dg=np.std(gvar)
print('u(g)=',dg)
```

script Python fourni
« Monte_Carlo_pendule_basique »
ou « Monte_Carlo_pendule_graphe »

Composer les incertitudes

Cas d'un titrage

Comparaison de la méthode numérique
et de la méthode par formule de propagation



script Python fourni
« `Monte_Carlo_titrage` »

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Capacité numérique : Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées.

Composer les incertitudes et comparer à une valeur de référence

Avec les élèves…

- On donne toutes les relations utiles.
- On automatise les calculs quand c'est possible (tableur, GUM_MC, programmation…).

L'intérêt est :

- d'avoir un regard critique sur les instruments choisis ;
- de comprendre pourquoi le maniement de certains instruments est à ce point contraint (exemple : la pipette jaugée)
- d'avoir un regard critique sur un protocole ;
- d'être en capacité de proposer des améliorations.

Retour sur la mesure du 200m



On perçoit que le repérage à l'œil est une source d'erreur…

Mais on sait aussi qu'elle peut être minimisée…

→ anticiper
→ limiter la parallaxe
→ s'entrainer
→ mettre ses lunettes
→ utiliser des instruments plus précis ?…

Et malgré tout ça, je suis « à combien » de la valeur retenue pour le record ?

Et finalement que retenir ?

Prise en compte de différentes sources d'incertitude

Lorsqu'il y a plusieurs sources d'incertitude, il faut tenir compte de toutes les incertitudes et utiliser la relation :

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots}$$

Cependant, il y a parfois un terme qui est très supérieur aux autres, on ne garde alors que celui-là.

Souvent, les valeurs d'incertitude sont de plus en plus faibles selon cet ordre :

1. Incertitudes de repérage par un expérimentateur ;
2. Incertitudes de lecture ;
3. Incertitudes de repérage par un appareil.

Grandeur calculée

Si une grandeur y est calculée à partir de plusieurs grandeurs mesurées x_i, alors il existe une relation de la forme : $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

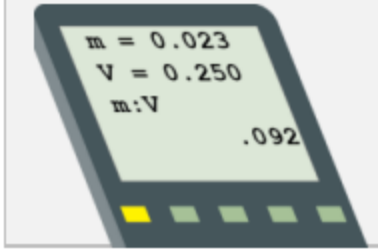
On a alors :

$$u(y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2$$

Relation	Incertitude
$y = a + b$ ou $y = a - b$	$u(y) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$
$y = \lambda \cdot a$ (λ constante)	$u(y) = \lvert\lambda\rvert \cdot u(a)$
$y = \frac{a}{b}$ ou $y = a \cdot b$	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$
$y = \lambda a + \mu b$ (λ et μ constantes)	$u(y) = \sqrt{\lambda^2 (u(a))^2 + \mu^2 (u(b))^2}$
$y = \lambda a^n b^m$	$\frac{u(y)}{\lvert y\rvert} = \sqrt{n^2 \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$

Et finalement pour les élèves…

Calcul



$x_{exp} = x_{calc}$

calculée à partir de valeurs mesurées

$u(x_{calc})$ Incertitude-type **composée**

- calculée à partir des incertitudes des valeurs intervenant dans l'expression
- relation donnée

Comparer à une valeur de référence

Retour sur la mesure du 200m



Et malgré tout ça, je suis « à combien » de la valeur retenue pour le record ?

Comparer votre mesure à la valeur de référence



Quelques bonnes raisons de bannir l'écart relatif…

- La valeur « théorique » est généralement elle aussi incertaine.
  - L'expression « valeur de référence » ne laisse pas croire qu'on a une valeur connue avec une incertitude nulle
  - Le choix systématique de la valeur attendue comme « référence » est une erreur (cf tout ce qui relève du contrôle qualité : c'est la mesure qui valide ou non un cahier des charges, pas l'inverse).
- L'écart est calculé indépendamment de l'incertitude qui caractérise la mesure.
  - Si on cherche à déterminer la température de fusion de l'eau en °C, l'écart relatif sera toujours énorme quelle que soit la qualité de notre mesure !
- Et surtout : on obtient une valeur dont on ne sait absolument pas quoi faire !
  - Exemple : un écart relatif de 9%, est-ce bon au mauvais ? Et si l'on considère que c'est mauvais… qu'est-ce qui est mauvais : la mesure ou la valeur « de référence » ?



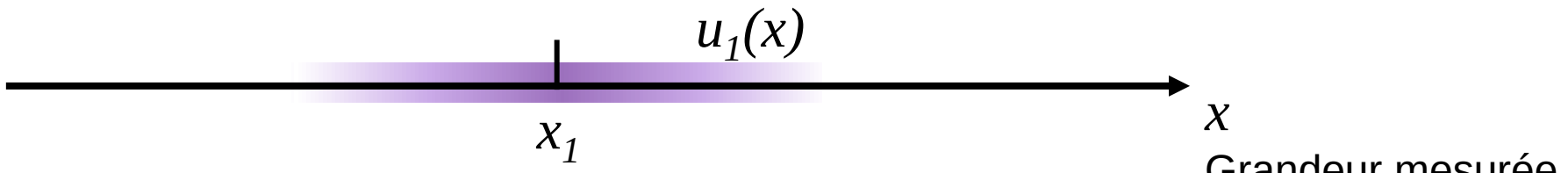
Qu’est-ce qu’une valeur de référence ?

- Une valeur mesurée par un autre expérimentateur, dans d’autres conditions mais à laquelle on accorde plus de confiance que notre propre mesure
- Une valeur dérivée d’un modèle… qui donne lieu à des mesures d’une autre grandeur : la « valeur théorique »
- Une valeur trouvée dans un Handbook
- Une valeur annoncée par un constructeur
- une constante universelle fixée par une institution…

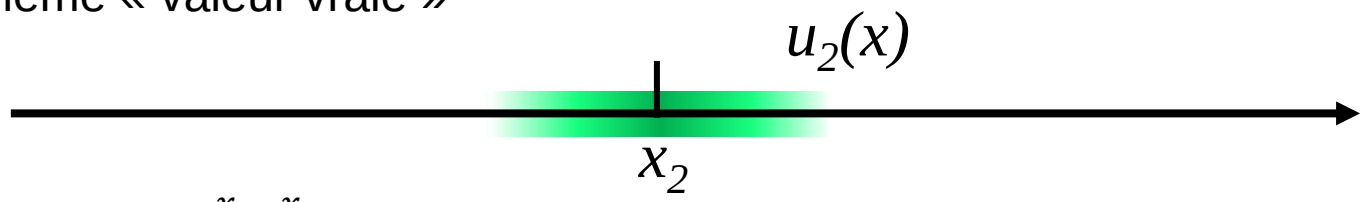
Dans tous les cas, la valeur de référence repose sur des mesures !

Comparer à une valeur de référence

Un nouveau critère de comparaison…
Pour comparer il faut faire des tests statistiques…



Hypothèse : même « valeur vraie »



La variable aléatoire $Z = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}}$ (écart normalisé) doit suivre une loi normale centrée sur 0.

Si Z est très grand, on décide de rejeter l'évènement (car très rare).

Dans le cas où on peut identifier une valeur de référence (par exemple x_2), $u_2(x) << u_1(x)$, donc $Z = \frac{|x_1 - x_2|}{u_1}$:

C'est l'écart par rapport à l'incertitude
(ou *rapporté* à l'incertitude
… et plus à la référence)

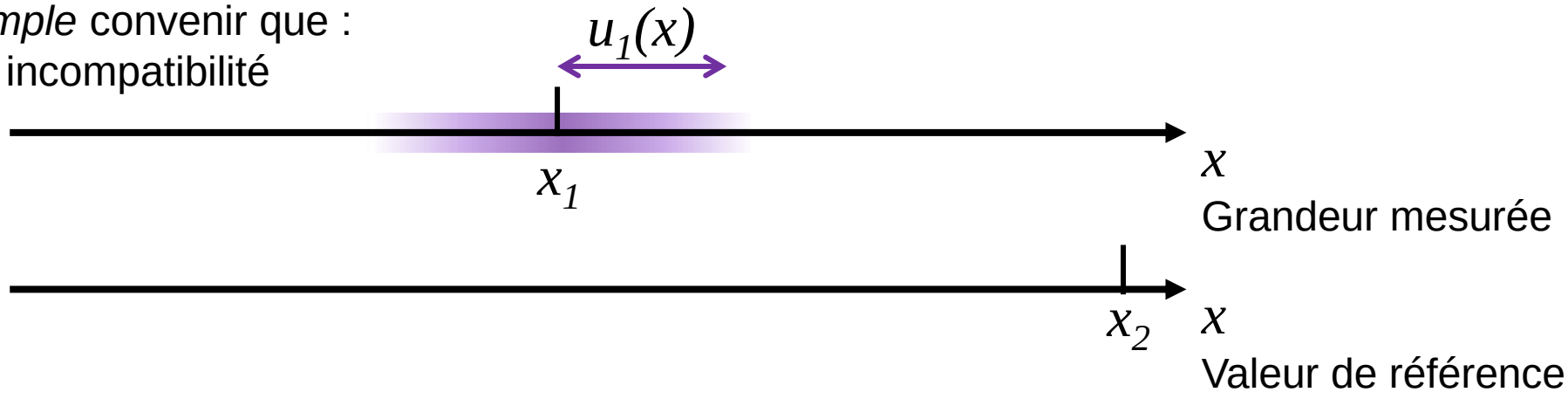
Comparer à une valeur de référence

Un nouveau critère de comparaison…

$$Z = \frac{|x_1 - x_2|}{u_1}$$ écart par rapport à l'incertitude (ou *rapporté* à l'incertitude)

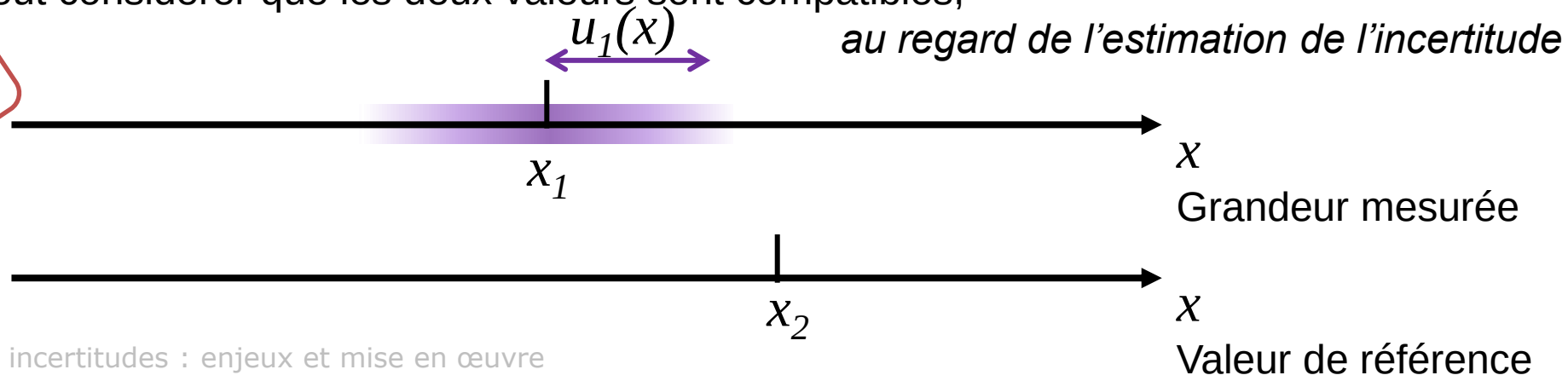
On peut *par exemple* convenir que :

- Si Z > 2, il y a incompatibilité



- Si Z < 2, on peut considérer que les deux valeurs sont compatibles, *au regard de l'estimation de l'incertitude*

Le critère adopté est lié à l'intervalle de confiance…

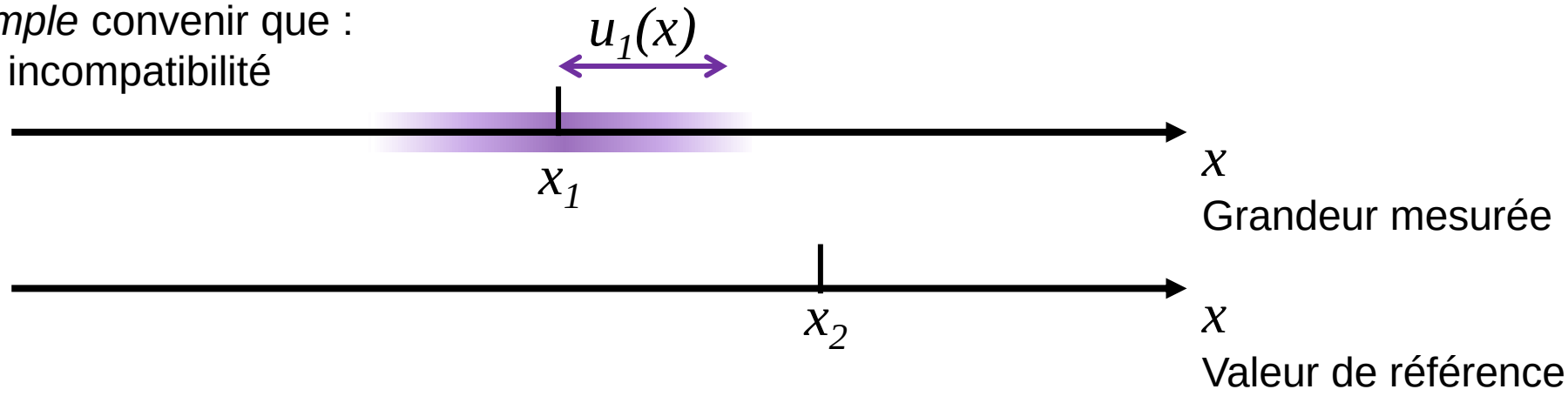


Un nouveau critère de comparaison…

$$Z = \frac{|x_1 - x_2|}{u_1}$$ écart par rapport à l'incertitude (ou *rapporté* à l'incertitude)

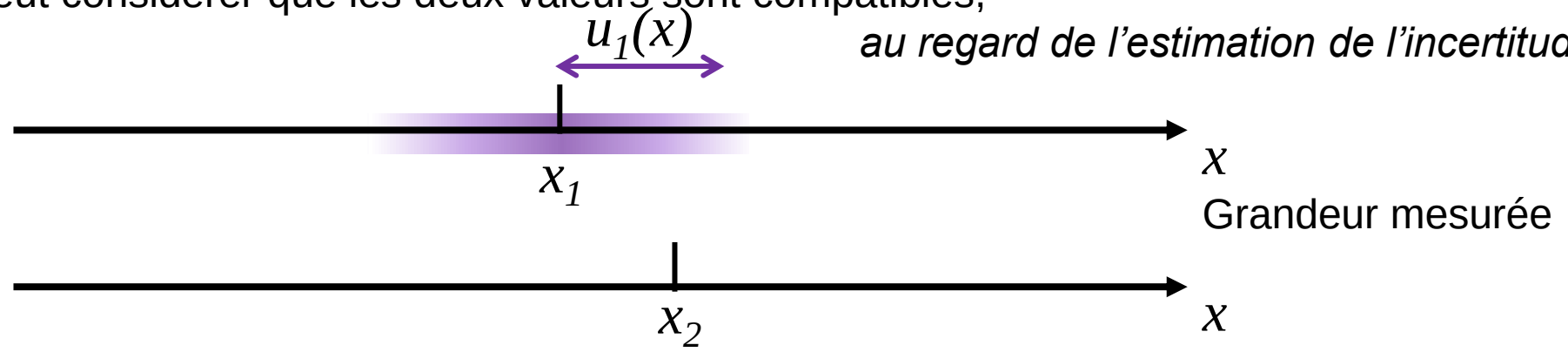
On peut *par exemple* convenir que :

- Si Z > 1, il y a incompatibilité



- Si Z < 1, on peut considérer que les deux valeurs sont compatibles, *au regard de l'estimation de l'incertitude*

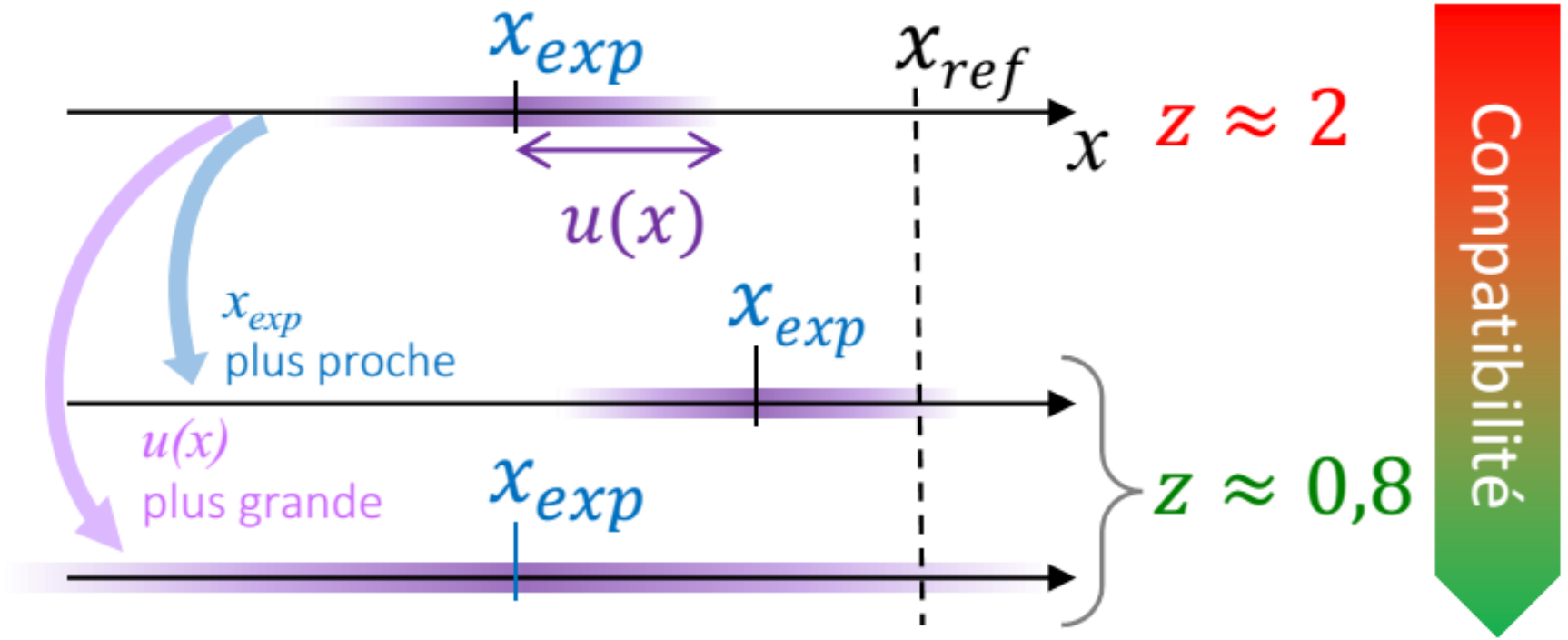
Le critère adopté est lié à l'intervalle de confiance…



Un nouveau critère de comparaison…

Estimation de l'écart rapporté à l'incertitude :

$$z = \frac{|x_{exp} - x_{ref}|}{u(x)}$$

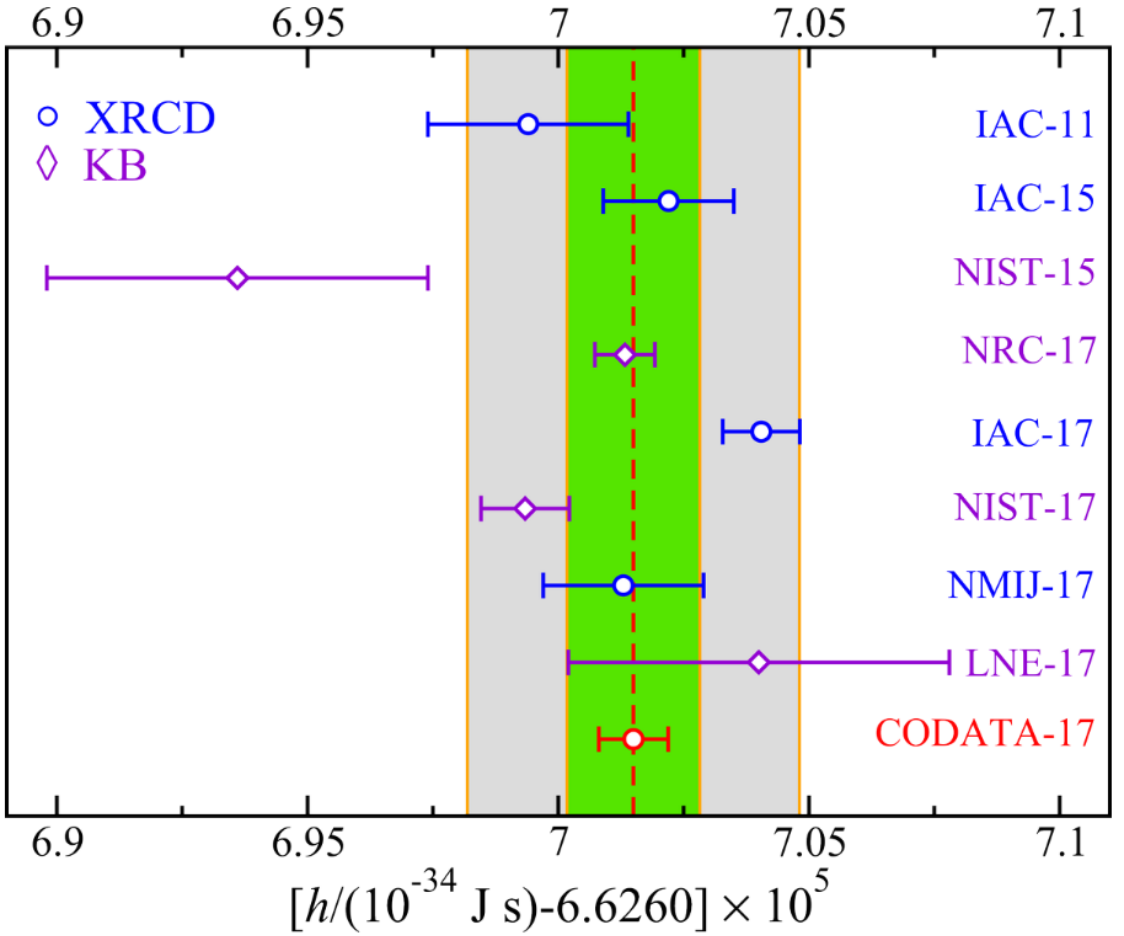


Comparer à une valeur de référence

Un nouveau critère de comparaison…

qui doit éviter tout effet de seuil !

- Dépend du niveau d'exigence
- Dépend des conditions de mesure
- Dépend de la fiabilité de la valeur de référence
- …



Et finalement que retenir ?

3. Écriture du résultat d'une mesure

3.1. Écrire une incertitude

L'incertitude-type est arrondie par excès pour ne conserver **qu'un seul chiffre significatif**.

3.2. Écrire une valeur mesurée

La valeur d'une grandeur physique doit être écrite afin que le dernier chiffre significatif ait la même position (en écriture décimale) que le chiffre de l'incertitude.
Attention, un chiffre significatif n'est pas un chiffre dont on est sûr mais **un chiffre qui a une signification**.

3.3. Écrire le résultat d'un calcul

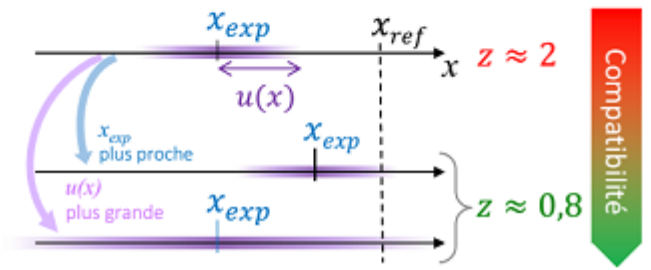
Si les valeurs sont données sans les valeurs d'incertitude, le résultat d'un calcul (impliquant multiplications et/ou divisions) doit être écrit avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins.
Si les valeurs sont données avec les valeurs d'incertitude, l'incertitude doit être calculée (voir 2.2).

4. Comparaison à une valeur de référence

On compare une valeur mesurée x_{exp} à une valeur de référence $x_{réf}$ en calculant le quotient suivant :

$$z = \frac{|x_{exp} - x_{ref}|}{u(x)}$$

C'est l'écart rapporté à l'incertitude de mesure.
Ce quotient est souvent appelé *z-score*.
Plus z est faible, plus la mesure peut être jugée compatible avec la valeur de référence. On peut donner aux élèves une valeur seuil, en sachant qu'elle est arbitraire et dépend du niveau d'exigence.

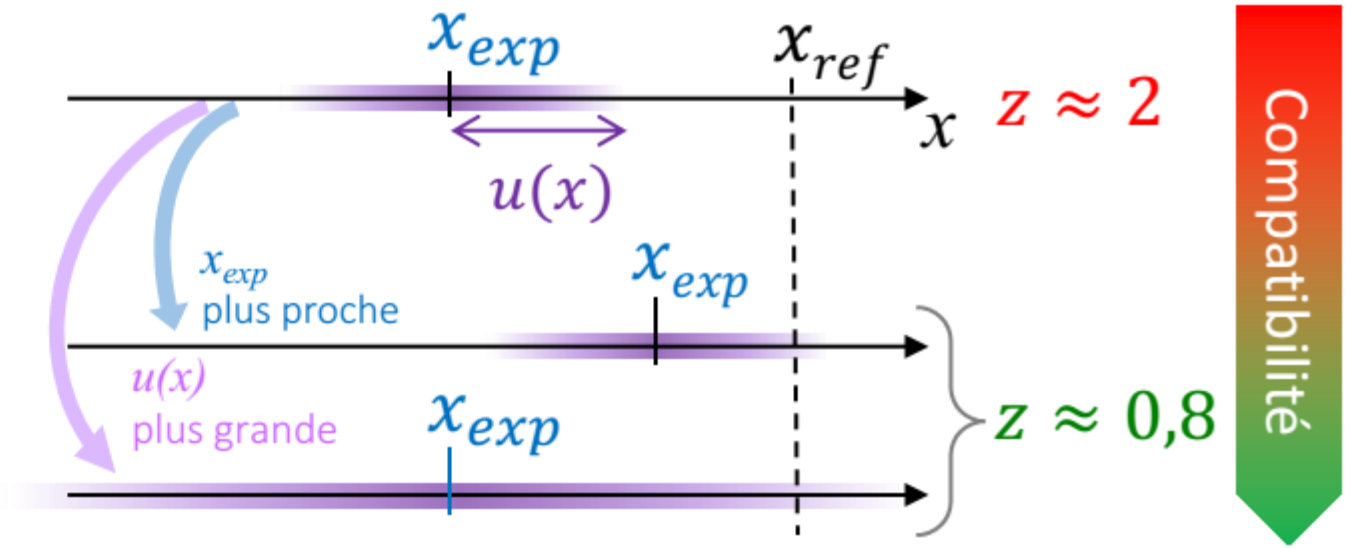


Terminale

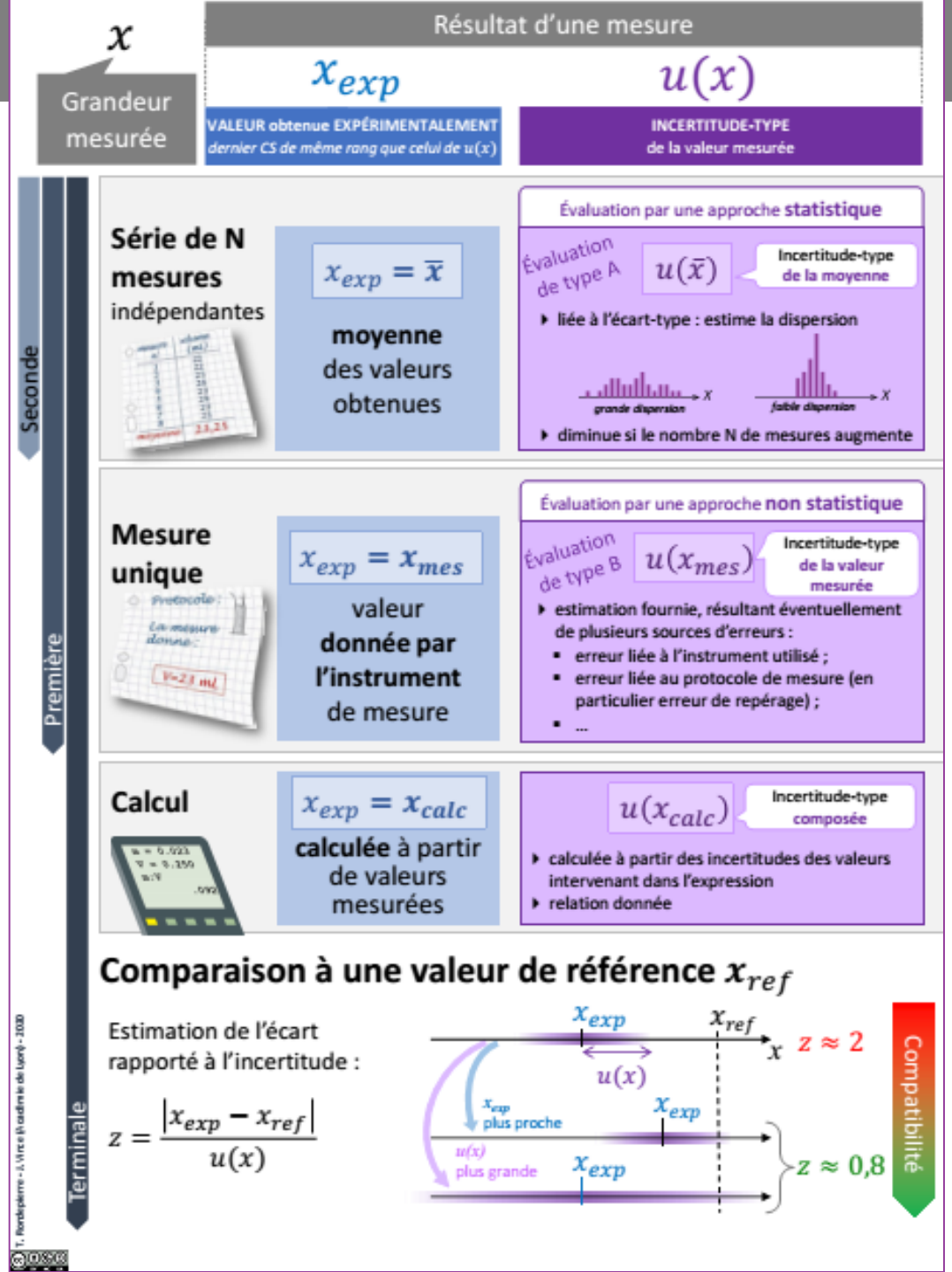
Comparaison à une valeur de référence x_{ref}

Estimation de l'écart rapporté à l'incertitude :

$$z = \frac{|x_{exp} - x_{ref}|}{u(x)}$$



Et finalement pour les élèves



Bibliographie

Documents officiels éducation nationale :
Une production récente du GRIESP (nov. 2019)



Un document récent sur Eduscol (2021)

GUM : guide to the expression of uncertainty in measurement : texte de référence mondial, en français



Bibliographie

Articles BUP

Voir zip en ligne, ou rechercher « Incertitudes » dans BupDoc



